

12 原子とスピン軌道相互作用

- 1 【水素様原子の微細構造】水素様原子 (アルカリ原子), すなわち閉殻の外に 1 個の価電子をもつ原子を, Coulomb ポテンシャル $V_c(r)$ のなかを 1 個の電子が運動していると近似する。このとき, ハミルトニアンは $H = H_0 + V_{LS}$, ただし

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V_c(r), \quad V_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV_c(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

で与えられる。 V_{LS} はスピン軌道相互作用を表す。このとき, 以下の問に答えよ。

- (1) $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ より, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ を $\mathbf{J}, \mathbf{L}, \mathbf{S}$ を用いて表せ。
 (2) スピン軌道相互作用によるエネルギーの変化は, $l > 0$ のとき

$$\Delta E_{nlj} = \frac{1}{2m^2c^2} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV_c(r)}{dr} \right\rangle_{nl} \frac{\hbar^2}{2} \begin{cases} l & (j = l + \frac{1}{2}) \\ -(l+1) & (j = l - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

で与えられることを, 1 次の摂動により示せ。

- (3) $2p$ 状態にある水素原子について, 分裂した準位間のエネルギー差を求めよ。その結果と, $n = 2$ の束縛状態のエネルギーとの比を計算せよ。動径波動関数, エネルギー準位の式, 微細構造定数およびボーア半径

$$R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{\sqrt{3a_0}} e^{-\frac{r}{2a_0}}, \quad E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

を用いてよい。

- 2 【水素原子の超微細構造】基底状態にある水素原子について, 電子のスピン s_e と陽子のスピン s_p の相互作用について調べる。陽子の磁気モーメントが $\mu_p = \frac{g_p e}{2m_p c} s_p$ であるとき, 電子スピンと陽子の磁気モーメントの相互作用は

$$V_{hfs} = \frac{e}{m_e c} s_e \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla \times (\mu_p \times \nabla) \frac{1}{r}$$

で与えられる。ここで, m_p, m_e はそれぞれ陽子と電子の質量である。

- (1) エネルギーの変化が

$$\Delta E_{hfs} = \frac{4g_p \alpha^2}{3} \left(\frac{e^2}{2a_0} \right) \frac{m_e}{m_p} \begin{cases} \frac{1}{2} & (s = s_p + s_e = 1) \\ -\frac{3}{2} & (s = s_p - s_e = 0) \end{cases}$$

で与えられることを, 1 次の摂動により示せ。ただし, 公式 $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$,

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$, 球対称のとき $\langle (s_e \cdot \nabla)(s_p \cdot \nabla) \rangle = \frac{1}{3} \langle s_e \cdot s_p \rangle \nabla^2$,

および基底状態の水素の波動関数 $|\varphi_{100}(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3}$ を用いてよい。

- (2) 分裂したエネルギーの差と基底状態のエネルギーとの比を求めよ。ただし,

$g_p = 5.56, m_p/m_e = 1840$ を用いよ。

- (3) 中性水素によって放出・吸収される電磁波の波長を計算せよ。ただし, 基底状態のエネルギー -13.6 eV を用いよ。