数理物理及び演習 III（量子力学）　2004.12.16

11　電磁場の量子化

1【ランダウ準位】z 方向に一定の磁場 B がかけられているとき，その中の，電荷 q，質量 m の荷電粒子について，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A} = (0,\, Bx,\, 0)$ とおけることを示せ。

(2) 荷電粒子のエネルギー準位を求めよ。

(3) (2) より，xy 面上でのエネルギー準位の単位面積あたりの縮退度を求めよ。

2【電気双極子放射】 真空中で励起状態にある原子が光子を放出してエネルギーの低い準位に遷移する場合について考える。このとき，量子化された光子のベクトルポテンシャルが，単位体積について

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda} e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\lambda} \quad (\lambda = 1,\, 2)$$

で与えられるとする。ただし，$\omega = (E_i - E_f)/\hbar$（$i,\, f$ はそれぞれ始状態，終状態），$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}$, $a^\dagger_{\boldsymbol{k}\lambda}$ はそれぞれ光子の波数ベクトル，偏りベクトル，生成演算子である。

(1) 電子と光子の相互作用ハミルトニアンは，$\boldsymbol{A}^2$ の項が無視できるとき

$$V = -\sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda} \cdot \boldsymbol{p} a^\dagger_{\boldsymbol{k}\lambda}$$

で与えられることを示せ。ただし，電子の電荷を e，質量を m とする。

(2) ハイゼンベルク表示 $[H_0,\, \boldsymbol{r}] = \dfrac{\hbar}{im}\boldsymbol{p}$ を用いて，$\langle f|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda} \cdot \boldsymbol{p}|i\rangle = -im\omega \langle f|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda} \cdot \boldsymbol{r}|i\rangle$ を示せ。ただし，H_0 は電子の無摂動ハミルトニアンとする。

(3) $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 1$ と近似し，$\boldsymbol{k}$ の和を積分で置き換えることにより，単位時間あたりの遷移確率

$$w_{if} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle|^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle f|e\boldsymbol{r}|i\rangle|^2$$

を求めよ。ただし，フェルミの黄金律

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(E_f + \hbar\omega_k - E_i) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

を用いてよい。

3【励起状態の寿命】 問 **2** の結果を用いて，水素原子の $2p$ 状態の寿命を求めよ。ただし，前回までの結果（8 定常状態の摂動論）を用いてよい。