数理物理及び演習 III（量子力学）　　*2004.12.2*

10　時間による摂動論

1【**遷移振幅**】時間に依存しないハミルトニアン H_0 の固有値 $E_n^{(0)}$ に対応する固有関数 $|\varphi_n^{(0)}\rangle$ $(n=1,2,\cdots)$ が与えられているとする。いま，時間による摂動 $V(t)$ を加えるとき，以下の問に答えよ。ただし，$V(t)$ の効果は H_0 に比べて十分小さいとする。

(1) 波動関数 $|\psi(t)\rangle$ に対し $|\psi(t)\rangle = e^{\frac{H_0}{i\hbar}t}|\psi(t)\rangle_I$ をみたす $|\psi(t)\rangle_I$（相互作用表示）を定義する。このとき

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = V_I(t)|\psi(t)\rangle_I, \quad V_I(t) = e^{-\frac{H_0}{i\hbar}t}V(t)e^{\frac{H_0}{i\hbar}t}$$

を導け。

(2) (1) の式を時間 t_0 から t まで積分することにより，1 次の摂動による遷移振幅

$$c_n(t) = c_n(t_0) + \sum_m \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} V_{nm}(t')c_m(t_0)dt',$$

$$V_{nm}(t) = \langle\varphi_n^{(0)}|V_I(t)|\varphi_m^{(0)}\rangle = e^{\frac{E_m^{(0)}-E_n^{(0)}}{i\hbar}t}\langle\varphi_n^{(0)}|V(t)|\varphi_m^{(0)}\rangle$$

を導け。ただし $|\psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t)|\varphi_n^{(0)}\rangle$ のように展開できるとする。

(3) 基底状態にある水素原子が，コンデンサーの極板の間におかれている。時間 $t=0$ において，時間に依存する一様な電場 $\boldsymbol{E}_0 e^{-t/\tau}$ が z 軸方向にかけられた。1 次の摂動を考慮して，$t \gg \tau$ においてこの原子が $2s$ または $2p$ 状態に存在する確率を計算せよ。ただし，前回の結果（8 定常状態の摂動論，問 **1**）を利用してよい。

2【**フェルミの黄金則**】問 **1** について，時間による摂動が $V(t) = Ve^{-i\omega t} + V^\dagger e^{i\omega t}$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ。ただし，$E=\hbar\omega$ とする。

(1) 初期状態が $|\psi(0)\rangle_I = |\varphi_n^{(0)}\rangle$ で与えられるとき，状態 n から状態 $k (k\neq n)$ への遷移振幅 $c_k(t)$ を，問 **1** の結果を用いて求めよ。

(2) n が基底状態であるとき，状態 k への単位時間あたりの遷移確率が

$$W_{nk} = \frac{2\pi}{\hbar^2}|\langle\varphi_k^{(0)}|V|\varphi_n^{(0)}\rangle|^2\delta(\omega_k-\omega_n-\omega)$$

で与えられることを示せ。ただし，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2 tx}{\pi t x^2} = \delta(x)$ であることを利用してよい。

(3) 基底状態にある水素原子に，時間による弱い電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \sin\omega t$ を加えたとき，電子が $2s$ または $2p$ 状態に遷移する確率を求めよ。