

6 角運動量の合成とスピン軌道相互作用

1 【電子スピンの合成】スピン相互作用している2つの電子(質量 m_e , 電荷 $-e$)について, 以下の間に答えよ。

(1) スピンが上向きの状態を $|\uparrow\rangle$, 下向きの状態を $|\downarrow\rangle$ とする。これらを合成し, 規格化された全スピンの固有状態をすべて求めよ。

(2) 一様磁場 B 中 (z 方向) の2つの電子のハミルトニアンが

$$H = a \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + k_e (s_{1z} + s_{2z}), \quad k_e = -g_e \frac{eB}{2m_e}$$

で与えられるとき, (1) の全ての固有状態に対するエネルギー固有値を求めよ。ただし, s_1, s_2 はそれぞれの電子のスピン, a は定数, g_e は電子の g 因子とする。

2 【軌道角運動量とスピンの合成】電子の1体系の軌道角運動量 ($l = 1$) とスピン ($s = \frac{1}{2}$) の合成について考える。以下の間に答えよ。

(1) 軌道角運動量の固有状態 $|l, m_l\rangle$ およびスピンの固有状態 $|s, m_s\rangle$ をすべて書け。

(2) 合成系を $|j, m\rangle$ としたとき, その固有状態をすべて書け。

(3) 合成系の固有状態を, (1) の固有状態を用いて表せ。その結果より, $l = 1, s = \frac{1}{2}$ に対する Clebsch-Gordan 係数の表を作れ。ただし, 以下の関係式を用いてよい。

$$J^- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle$$

(4) (3) の固有状態について, $l \cdot s$ の期待値を求めよ。

(5) (1) の軌道部分を球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ で表示し, スピン部分をベクトル $(1, 0), (0, 1)$ で表示するとき, (3) の合成系の固有状態をベクトルで表せ。