数理物理及び演習Ⅲ（量子力学）　2004.6.24

5　3次元井戸型ポテンシャル

1 **【球対称の井戸（s状態）】** 中心力場 $V(r)$ 中の粒子の動径部分の Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r) = 0$$

を用いて，球対称井戸型ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

の中の質量 μ，s 状態（$l = 0$）の粒子の束縛状態（$E < 0$）を考える。

(1) 波動関数を求めよ。

(2) 束縛状態が存在しないための条件を求めよ。

(3) 束縛状態が 2 つ存在するときの条件を求めよ。また，このときの波動関数の概形を図示せよ。

(4) 井戸が無限に深いとき，エネルギー準位を求めよ。

2 **【球対称の井戸（p状態）】** 一般の l に対する問 **1** の解は

$$R_l(r) = \begin{cases} Aj_l\left(\sqrt{2m(E+V_0)/\hbar^2}\, r\right) & (r < a) \\ Bh_l^{(1)}\left(i\sqrt{-2mE/\hbar^2}\, r\right) & (r > a) \end{cases}$$

と表される（A, B は定数）。ただし

$$j_l(x) = (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad n_l(x) = -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x), \quad h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x)$$

である。

(1) $l = 0$ のときの解が問 **1** の結果と一致することを確かめよ。

(2) $l = 1$ のとき，$E = 0$ でも束縛状態が存在することを示せ。