数理物理及び演習Ⅲ（量子力学）　*2004.5.13*

2　角運動量と球関数

1 **【球関数】** 軌道角運動量の規格化された固有関数（球関数）を $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ とするとき，以下の問いに答えよ。ただし，以下の式を用いてよい。

$$L_+ = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\ L_- = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\ L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

(1) $m = l$ のとき，$Y_{ll}(\theta,\varphi) = \dfrac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\dfrac{(2l+1)!}{4\pi}}e^{il\varphi}\sin^l\theta$ と表せることを示せ。

(2) $m \leq 0$ のとき，$L_- Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}Y_{lm-1}(\theta,\varphi)$ を用いて，球関数

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = i^{m+|m|}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi},$$

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_l(z),\quad P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l$$

を導け（※これは $m > 0$ についても成り立つ）。

(3) $l \leq 1$ のときの固有関数を全て求め，それらの 確率分布 $|Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2$ の概略を，xz 平面上 $(y=0)$ に図示せよ。

2 **【直交関係】** 球関数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ は，直交関係

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

をみたすことを示せ。ただし，ガンマ関数，ベータ関数に関する公式

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p,q>0),$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad \Gamma(n+1) = n!$$

を用いてよい。

3 **【パリティ】** 球関数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ に空間反転 $(\theta\to\pi-\theta,\ \varphi\to\varphi+\pi)$ を施すことにより，パリティを求めよ。