

1 1次元量子系の復習 (トンネル効果)

1 【ポテンシャル障壁】 エネルギー E の粒子 (質量 m) が, 1次元ポテンシャル障壁

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (0 \leq x \leq l) \\ 0 & (x \leq 0, x \geq l) \end{cases}$$

に左から入射するとき, 以下の問に答えよ。ただし, $E > V_0$ とする。

- (1) このときの (時間に依存しない) Schrödinger 方程式を解け。
- (2) 透過率 T および反射率 R を求めよ。
- (3) $T = 1$ となる条件を求めよ。また, このときの確率密度の概略を図示せよ。

2 【トンネル効果】 問1において, $E < V_0$ とするとき, 以下の問に答えよ。

- (1) 透過率 T を求めよ。
- (2) $\sqrt{2m(V_0 - E)}l/\hbar \gg 1$ のとき, $T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m(V_0 - E)}l}{\hbar}\right)$ となることを示せ。また, このときの確率密度の概略を図示せよ。

3 【ガモフの透過因子】 1次元ポテンシャル障壁 $V(x)$ がゆるやかな曲線で表されるとき, 以下の問に答えよ。ただし, 古典的回帰点を $x = a, b$ とする。

- (1) 問2 (2) の結果より, ガモフの透過因子 $P = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(V(x) - E)} dx\right)$ を導け (ヒント: $V(x)$ を無数の長方形に分割する。指数部分のみを考える)。
- (2) 原子番号 Z_1 の原子核に, 原子番号 Z_2 の原子核が相対速度 v で入射するときのポテンシャルエネルギーを次のように表す。

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq R) \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} & (r \geq R) \end{cases}$$

このとき, $P = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mZ_1 Z_2 e^2 r_0} \left(\cos^{-1} \sqrt{\frac{R}{r_0}} - \sqrt{\frac{R}{r_0} - \frac{R^2}{r_0^2}}\right)\right\}$ となることを示せ。ただし, $r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$ とする (ヒント: $r = r_0 \cos^2 \theta$ において積分する)。

- (3) (2) において, E がクーロン障壁に比べて十分小さい, すなわち $r_0 \gg R$ のとき, $P = \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right)$ となることを示せ。
- (4) 太陽などの恒星の中心では, 原子番号の小さい水素がまず核融合反応を起こし, 温度が上昇するにつれて, ヘリウム, 炭素, 酸素等の原子番号のより大きい原子核が核融合反応を起こすようになる。(3) の結果より, これを説明せよ。