数理物理及び演習I（解析）　*2004.12.22*

12　関数行列式と積分変数の変換

1 座標系 $(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$ が座標系 $(u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n)$ によって

$$x_1 = f_1(u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n),\; x_2 = f_2(u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n),\; \cdots,\; x_n = f_n(u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n)$$

のように表されるとき，**関数行列式（Jacobian）**は，以下のように定義される。

$$J \equiv \frac{\partial(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)}{\partial(u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n)} \equiv \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial u_1 & \partial x_1/\partial u_2 & \cdots & \partial x_1/\partial u_n \\ \partial x_2/\partial u_1 & \partial x_2/\partial u_2 & \cdots & \partial x_2/\partial u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_n/\partial u_1 & \partial x_n/\partial u_2 & \cdots & \partial x_n/\partial u_n \end{vmatrix}$$

(1) $|J|$ は，$x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n$ 空間と $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n$ 空間において互いに対応する体積（2次元の場合は面積）の比を表す。これを $x = au + bv,\, y = cu + dv$ の場合について確認せよ（$a,\, b,\, c,\, d$ は定数)。

(2) $x + y = u,\, x = uv$ のとき，$\dfrac{\partial(x,\, y)}{\partial(u,\, v)}$ を計算せよ。

(3) (2) の結果を用いて，ガンマ関数とベータ関数

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx,\; B(p,\, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

の関係式 $B(p,\, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を証明せよ。ただし，$p,\, q$ は正の実数である。

2 **極座標系** $(r,\, \theta,\, \varphi)$ と xyz 直交座標系の関係は

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\; y = r\sin\theta\sin\varphi,\; z = r\cos\theta$$

で与えられる。

(1) $\dfrac{\partial(x,\, y,\, z)}{\partial(r,\, \theta,\, \varphi)}$ を計算せよ。

(2) 原点を中心とする半径 a の球面を S とし，$\boldsymbol{A} = (x^3,\, y^3,\, z^3)$ とするとき，面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ。