数理物理及び演習I（解析） *2004.12.13*

11　ガウスの定理

1 閉曲面 S およびその内部 V におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して，**ガウスの定理**

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$$

が成り立つことを証明せよ。

2 S は閉曲面，V は S で囲まれた領域またはその体積とする。$\boldsymbol{r}=(x,\,y,\,z)$, $|\boldsymbol{r}|=r$ とするとき，次の式を証明せよ。

(1) $\displaystyle \frac{1}{3}\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}dS = V$　　(2) $\displaystyle \int_V \nabla\times\boldsymbol{A}\,dV = -\int_S \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n}\,dS$

3 閉曲面 S で囲まれた領域を V，$\boldsymbol{r}=(x,\,y,\,z)$, $|\boldsymbol{r}|=r$ とするとき，

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \begin{cases} 0 & \text{原点 O が S の外部にあるとき} \\ 4\pi & \text{原点 O が S の内部にあるとき} \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ。

4 原点にある質点 m が作る重力ポテンシャルは $\phi(r) = -\dfrac{Gm}{r}$ で表される。このとき，次の問に答えよ。ただし，G は重力定数，$\boldsymbol{r}=(x,\,y,\,z)$, $|\boldsymbol{r}|=r$ とする。

(1) $\phi(r)$ が位置 $\boldsymbol{r}$ にある単位質量の質点に及ぼす力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(r)$ を求めよ。

(2) 質点 m が閉曲面 S に含まれるとき，**ガウスの法則** $\displaystyle\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi Gm$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 質量分布が $\displaystyle m = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\,dV$ で与えられるとき，ニュートン力学における重力場の**ポアッソン方程式** $\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ。