数理物理及び演習I（解析）

2004.11.29

10　ストークスの定理

1 xy 平面上に長方形の微小面積 $dS = dxdy$ を考え，その周りに沿って $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を積分することにより，xy 平面について**ストークスの定理**

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つことを証明せよ。また，任意の閉曲線 C に対してベクトル $\boldsymbol{A}$ が $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ をみたすなら，$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ であることを示せ。

2 C は閉曲線，S は C を縁とする曲面領域またはその面積とする。$\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$, $|\boldsymbol{r}| = r$ とするとき，次の式を証明せよ。

(1) xy 平面で $\dfrac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = S$

(2) $\dfrac{1}{2}\oint_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{n}dS$

(3) $\oint_C f d\boldsymbol{r} = -\int_S \nabla f\times\boldsymbol{n}dS$

(4) $\dfrac{1}{2}\oint_C r^2 d\boldsymbol{r} = -\int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}dS$

3 ファラデーの電磁誘導の法則およびアンペールの法則

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS, \quad \int_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

より，マックスウェルの電磁方程式を導け。さらに，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ およびスカラーポテンシャル ϕ で表し，$\boldsymbol{A}$ および ϕ のみたす方程式を求めよ。