数理物理及び演習I（解析）

2004.10.25

8　スカラー・ベクトルの線積分

1 $f(x,\, y,\, z) = x^2 + y^2 + z^2$ について，次の C に沿っての線積分の値を求めよ。

(1) A(1, 2, 0) から B(1, 2, 3) までの線分。

(2) O(0, 0, 0) から B(1, 2, 3) までの線分。

2 曲線 C : $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t\ (0 \le t \le 2\pi)$ について，$\boldsymbol{A} = (z,\, x,\, 0)$ とするとき，次の線積分の値を求めよ。ただし，$d\boldsymbol{r} = (dx,\, dy,\, dz)$ とする。

(1) $\displaystyle\int_C z\, d\boldsymbol{r}$　　(2) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$　　(3) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{r}$

3 ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル φ をもつ，すなわち $\boldsymbol{F} = -\nabla\varphi$ で表されるとき，次の問に答えよ。ただし，$\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

(1) 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値は点 A と点 B の間の経路にはよらないことを示せ。

(2) $\boldsymbol{F}$ は原点にある質量 m の質点が位置 $\boldsymbol{r}$ にある単位質量の質点に及ぼす力，すなわち $\boldsymbol{F} = -\dfrac{Gm}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ (G, m は定数) であるとき，(1) の線積分を計算せよ。ただし，$\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OB} = b$ とする。