数理物理及び演習I（解析） *2004.6.14*

5　ベクトル場の回転とベクトルポテンシャル

1 微分演算 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z},\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x},\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)$ が，回転の意味をもつことを示せ。また，$\boldsymbol{A} = (xz^3, 2x^2yz, 2yz^4)$ のとき，点 $(1, -1, 1)$ における $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ を求めよ。

2 速度場 $\boldsymbol{v}$ が以下のように与えられているとき，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{v} = (-y,\ x,\ 0)$

(2) $\boldsymbol{v} = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$

3 $\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{B}$ が成り立つことを証明せよ。

4 $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とするとき，以下の問に答えよ。

(1) $\mathrm{div}\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 磁気モーメント $\boldsymbol{m}$（定ベクトル）から生じる磁場 $\boldsymbol{B}$ のベクトルポテンシャル，すなわち $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ をみたすベクトルは，

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

で与えられる（μ_0 は真空の透磁率）。このとき，磁場は

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right)$$

となることを示せ。