数理物理及び演習I（解析）

2004.5.31

4　ベクトル場の発散とラプラシアン

1 微分演算 $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$ が，発散の意味をもつことを示せ。また，$\boldsymbol{A} = (x^2 z, -2y^3 z^2, xy^2 z)$ のとき，点 $(1, -1, 1)$ における $\boldsymbol{A}$ の発散を求めよ。

2 $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\cdot\boldsymbol{A} + f\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ が成り立つことを証明せよ。また，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$ とするとき，$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^n}$ の発散が 0 となるような n の値を求めよ。ただし，$r \neq 0$ とする。

3 $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \triangle f$ とするとき，$\nabla^2 = \triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ であることを示せ。また，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のとき，$\triangle \left(\dfrac{1}{r}\right)$ を計算せよ。

4 スカラー関数が r のみの関数 $f(r)$ であるとき，$\triangle f = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{df}{dr}\right)$ となることを示せ。また，これを用いて問 **3** の式を計算せよ。