数理物理及び演習I（解析）　*2004.5.17*

3　偏微分とスカラーポテンシャル

1 以下の問に答えよ。

(1) f が原点からの距離 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のみの関数であるとき

$$\nabla f = \frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ とする。

(2) 原点に電荷 e が置かれているとき，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ における静電ポテンシャルは $U=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$ によって与えられる（ε_0 は真空の静電率）。電場 $\boldsymbol{E}=-\nabla U$ を求めよ。

2 $\boldsymbol{H}=k\,(y,\,x)$ で表される磁場がある。

(1) 上の磁場が導かれるような磁位 φ，すなわち $\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi$ を満たす関数 φ を求めよ。

(2) 等磁位線を描き，磁場の方向を示すおおよその図を描け。

3 3 次元直交座標系 $(x,\,y,\,z)$ における微分演算

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},\quad \boldsymbol{i}=(1,\,0,\,0),\,\boldsymbol{j}=(0,\,1,\,0),\,\boldsymbol{k}=(0,\,0,\,1)$$

は，3 次元極座標系 $(r,\,\theta,\,\varphi)(x=r\sin\theta\cos\varphi,\,y=r\sin\theta\sin\varphi,\,z=r\cos\theta)$ では

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \boldsymbol{e}_r,\,\boldsymbol{e}_\theta,\,\boldsymbol{e}_\varphi \text{ は } r,\,\theta,\,\varphi \text{ 方向の単位ベクトル}$$

となることを示し，$\boldsymbol{e}_r,\,\boldsymbol{e}_\theta,\,\boldsymbol{e}_\varphi$ を $\theta,\,\varphi$ を用いて表せ。