数理物理及び演習I（解析）　　2004.4.26

2　偏微分とスカラー場の勾配

1 微分演算 $\mathrm{grad} = \nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ が勾配の意味をもつことを示せ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) $\phi = \phi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$ のとき，$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\psi = \psi(x, y, z)$ のとき，$\nabla f(\psi) = \dfrac{df}{d\psi}\,\nabla\psi$ が成り立つことを証明せよ。

(3) スカラー場 $f(x, y, z) = e^{xyz}$ の勾配を求めよ。

(4) (3) について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ となることを示せ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{d \tan^{-1} x}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 関数 $f(x, y) = x^2 \tan^{-1}\dfrac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ。

(3) (2) について，原点における $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ の値を求めよ。