

10 固有値と固有ベクトル

1 正方行列 A に対して, $Ax = \lambda x$ をみたす $x (\neq 0)$ があるとき, スカラー λ を行列 A の固有値, ベクトル x を固有値 λ に対する固有ベクトルという。

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, A の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。また, A の固有ベクトルを列にもつ行列 P に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列であることを確かめよ。

2 行列 $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ。

- (1) 固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) それぞれの行列について, 固有ベクトルが直交系をなすことを示せ。
- (3) 適当なユニタリ行列または直交行列を用いて, それぞれの行列を対角化せよ。

3 A, B を n 次実正方行列, A は n 個の相異なる固有値をもつ対称行列とする。 $AB = BA$ が成立するとき, B も対称行列であることを証明せよ。