数理物理及び演習I（線形代数）　2004.11.22

9　行列の階数と連立方程式の解の存在

1 次の行列の階数（rank）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

2 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{pmatrix}$ の階数（rank）を求め，さらに次の連立方程式の解があれば求めよ。

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

3 A は $(l \times m)$ 行列，B は $(m \times n)$ 行列とするとき，

$$AB = O \quad \text{ならば} \quad \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq m$$

が成り立つことを証明せよ。