

## 7 ベクトル空間・ベクトルの1次独立

**1** 実数を係数にもつ1変数  $x$  の多項式全体を考える。

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

と実数  $k$  に対して

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n,$$

$$kf(x) = ka_0 + ka_1x + \cdots + ka_nx^n$$

によって和と実数倍を定めるとき、この多項式全体はベクトル空間をなすことを示せ。

**2** 実数全体を定義域とする関数全体のベクトル空間において、次の関数列が1次独立であることを示せ。

(1)  $\cos t, \sin t$     (2)  $1, t, t^2$     (3)  $e^t, te^t, t^2e^t$

**3** 3項列ベクトル空間において、次のベクトルの組は1次独立であるかどうか調べよ。

(1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$     (2)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**4** 3次正方行列全体のベクトル空間において、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とするとき、次の組は

1次独立であるかどうか調べよ。

(1)  $A, A^2, A^3$     (2)  $A, A^2, A^3, A^4$