数理物理及び演習Ｉ（線形代数）　2004.5.24

3　１次変換，転置行列，行列の関数

1 4 次元ベクトル (ct, x, y, z) に対して $s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ を定義するとき，s は 1 次変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって不変であることを示せ。ただし，$c, \beta (\neq 1), \gamma$ は定数とし，$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。また，上の行列の逆行列を求めよ。

2 任意の正方行列 A について，以下の問いに答えよ。

(1) $B = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ は対称行列であることを示せ。

(2) $C = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ は反対称行列であることを示せ。

(3) A は対称行列と反対称行列の和で表されることを示せ。

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 4i & 5 & 6i \\ 7 & 8i & 9 \end{pmatrix}$ を対称行列と反対称行列の和で表せ。

(5) 同様の手順で，(4) の A をエルミート行列と反エルミート行列の和で表せ。

3 行列 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 任意の 2 行 2 列の行列は上の 4 個の行列の線形結合 $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_j \sigma_j + bE$ で表されることを示し，その係数が $a_j = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(A\sigma_j)$, $b = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,A$ となることを証明せよ。

(2) $\exp\,(i\,\theta\sigma_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ を計算せよ。