数理物理及び演習I（線形代数） *2003.5.10*

2　行列の和と積

1 以下の行列について，AB, BA を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2 次の中から2個の行列を選ぶとき，積が存在するものについて計算せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，A^2, A^3 を求めよ。その結果より A^n を推測せよ。

4 行列 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j, \ \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j \ (j, k = 1, 2, 3)$ を計算せよ。

(2) 3次元ベクトル $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を定義するとき，任意の3次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して以下の式が成り立つことを示せ。

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$