2008年度　修士論文

高密度星における
ニュートリノ放射の研究

上智大学大学院
理工学研究科　物理学専攻
博士前期過程　宇宙物理学研究室

B0776021　　内田　慎介

目次

図目次

表 目 次

概要

ニュートリノは宇宙において常に生成されている。太陽質量の約 8 倍以上の質量を持つ星は、星としての一生を終える時に超新星爆発し、重力崩壊を起こし中心部は急激に凝縮してブラックホールとなる。また、太陽質量の 1.4～8 倍までの星も同様に超新星として生涯を終えて、中心部は中性子星となる。このブラックホールや中性子星となる時に、重い原子核は破壊されて大部分は陽子などの軽い原子核となり、さらに陽子は電子と結合して中性子となる。この時、大量のニュートリノが生み出される。また、超新星爆発の際に巻き散らされた物質と、この爆発に伴って加速、生成された高エネルギーの宇宙線との衝突により作り出される π 中間子の崩壊から、やはり大量のニュートリノは生み出される。これら 2 つの起源から生成されたニュートリノは、その後、銀河系空間へと光速で飛び去る。その他に高エネルギーの宇宙線による宇宙空間の水素などの原子核と衝突し、その結果生じる前述の生成過程による大量のニュートリノや、星の中心部で進行している熱核融合反応の副産物として生成されるニュートリノもある。

これらのニュートリノを総称して宇宙ニュートリノと呼ぶ。宇宙ではこのようにして常にニュートリノは生成されている。更にビッグバン宇宙論によれば、宇宙創造期にクォーク/レプトンのスープの状態から急激な宇宙膨張にともなう宇宙の急冷により、原子核の生成が起きていくのだが、この膨張スピードがクォーク/レプトン反応より早くなった瞬間から、ニュートリノは他の素粒子と反応しなくなり、宇宙空間にそのまま残存することになる。宇宙創成 10^{-44}sec で時空の揺らぎが終わり、粒子の生成、重力相互作用の分離が起こる。10^{-35}sec で強い相互作用と電弱相互作用が分離し、バリオンが発生し、10^{-11}～10^{-4}sec で弱い相互作用と電磁相互作用が分離しクォークがハドロンとなる。10^{-2}sec で格子と反格子の対消滅が起こり、そのうちあるものは宇宙の膨張速度の加速のなか反応ができなくなり、格子が CP の破れにより残光する。0.2sec で ν_e が宇宙の膨張の加速のなか解放される。10sec で e^-、e^+ の対消滅が起こり、大量の光子が発生するが、これは宇宙背景放射である。これも加速する宇宙膨張のなか反応が終わり、CP の破れにより e^- だけが残る。解放された ν_e の数は宇宙背景放射の光子数 ($\sim 400/\mathrm{cm}^3$) に匹敵すると考えられている。現在の宇宙での単位体積あたりの ν_e の数は、$\sim 330/\mathrm{cm}^3$ である。これは、$10^{16}/\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{sec}$ が地球上に降り注いでいることを意味する。宇宙空間の水素数が$\sim 10^{-7}/\mathrm{cm}^3$ であるから、非常に多いことが分かる。

宇宙ニュートリノの中でも発生するニュートリノには 3 種類がある。第 1 には太陽のような主系列星の水素がヘリウムに核融合されるときに発生する電子ニュートリノである。この時に、ニュートリノによって持ち去られるエネルギーは核融合反応の 6% に過ぎない。第 2 には観測される超新星爆発で起こるニュートリノ反応の逆 β 崩壊である。この時、大量のニュートリノが放出される。第 3 には進化の進んだ白色矮星のような高温、高密度下でのニュートリノの対生成である。この時、ニュートリノは光子のエネルギーよりも 10～100 倍のエネルギーを宇宙空間に持ち去る。高密度星では、ニュートリノ放射過程によるエネルギー放出が大変重要な意味を持つのである。そしてこの放射過程が本研究のテーマである。

本論文は、このニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の具体的な発生過程の計算成果を述べることを目的とする。特に、フォトニュートリノ放射過程、液体金属相のときのニュートリノ制動放射過程の計

算を以前に行われた研究からさらに拡張して精度を上げ計算したものとなっている。また、ペアニュートリノ放射過程、フォトニュートリノ放射過程、プラズマニュートリノ放射過程、ニュートリノ制動放射過程、再結合ニュートリノ放射過程を総合的に議論する。

第1章　序論

この章では、ニュートリノ放射の研究において重要な研究対象となるニュートリノと高密度星について、1.1 及び 1.2 で述べ、その次に主要な研究テーマであるニュートリノ放射の紹介を 1.3 で行うことにする。

1.1　ニュートリノ

1.1.1　ニュートリノの性質

ニュートリノはベータ崩壊において、一見エネルギー保存則が破れているように見える現象を説明するために W.Pauli が仮定し、E.Fermi により理論づけられた粒子である。弱い相互作用しかしないため長い間その存在を直接的に実証できなかった。1953 年になって F.Reines により原子炉からのニュートリノが確認されたのである。

ニュートリノは素粒子の内のレプトンの一つであり、その性質は電荷が 0 であり、スピンは 1/2、質量は測定できないほど小さい。電気的に中性なニュートリノは電磁相互作用がなく、レプトンであるため強い相互作用もない。弱い相互作用と重力相互作用でしか反応しない。しかし質量が非常に小さいため、重力相互作用もほとんど反応しない。そのため他の素粒子との反応が少なく、透過性が非常に高いのである。

また、ニュートリノには 3 種類が知られている。それぞれ電子ニュートリノ (ν_e) 、ミューニュートリノ (ν_μ)、タウニュートリノ (ν_τ) である。表 1.1 にこれらのニュートリノの種類と質量の上限値を示す。ニュートリノの観測には荷電カレント反応と中性カレント反応が利用される。$W^\pm$ を媒介して相互作用により粒子が電荷を変えるものを荷電カレント反応という。このときミューニュートリノならミュー粒子を生成するので、ニュートリノの種類を判別することが出来る。これに対して Z^0 を媒介しての相互作用を中性カレント反応という。中性カレント反応の場合はニュートリノの種類を探る反応としては役に立たない。また、ニュートリノと物質との反応は断面積が小さく 1GeV 以上ではおよそニュートリノのエネルギーに比例する。核子との相互作用の場合にはニュートリノのエネルギーが 1GeV〜10TeV の領域では、およそ

$$\sigma \approx 10^{-38} \times E_\nu \,(\mathrm{GeV})\,\mathrm{cm}^2 \tag{1.1}$$

が成り立つ。ここで、E_ν (GeV) はニュートリノのエネルギーである。

1.1.2　カミオカンデとスーパーカミオカンデ。

ニュートリノは物質を貫通する能力が高く、他の物質と反応することなく簡単に地球を抜けていってしまう。しかし自然のニュートリノ自体の数はとてもたくさんあり、例えば太陽から来るニュートリノは、私た

	レプトン	記号	質量
第一世代	電子	e^-	0.5MeV
	電子ニュートリノ	ν_e	$<$ 3eV
第二世代	ミュー粒子	μ^-	106MeV
	ミューニュートリノ	ν_μ	$<$ 0.2KeV
第三世代	タウ粒子	τ^-	1.8GeV
	タウニュートリノ	ν_τ	$<$ 18KeV

表 1.1: レプトンの種類。

ちの体の中を $1\mathrm{cm}^3$ あたり毎秒 660 億個いつも通り抜けている。これを検出するのが「カミオカンデ」とその後継の「スーパーカミオカンデ」である。

ニュートリノに衝突されて高速で移動する電子が放出するわずかな光を、壁面に備え付けた数多くの超大型の検出器で検出して、方向やエネルギーを調べる。装置を地下に設けることで、ニュートリノ以外の粒子の影響を避けることができ、また超純水を使えば検出効率を上げることができる上に、放射性物質の影響を避けることができる。

	カミオカンデ	スーパーカミオカンデ
超純水	3000 トン	50000 トン
検出器数	1000 本	11200 本

表 1.2: カミオカンデとスーパーカミオカンデ。

小柴昌俊博士らのグループは、カミオカンデによって、1987 年 2 月に大マゼラン星雲で起きた超新星爆発から放出されたニュートリノを、世界で初めて検出することに成功した。そして、これにより小柴昌俊博士は、2002 年度のノーベル物理学賞を受賞したのである。

図 1.2 が建設中のスーパーカミオカンデであり、壁一面に装備されているガラス玉のようなものがニュートリノ検出器である。

1.1.3 ニュートリノ振動

ニュートリノが最初に発見されたのは原子炉からである。そして、巨大な核融合炉である太陽からもニュートリノが飛んできている。しかし、太陽からの電子ニュートリノ (太陽ニュートリノ) が予想値の半数程度しか観測されないという不思議な現象が指摘されており、これは、太陽ニュートリノ問題と呼ばれている。この現象はカミオカンデの実験でも 1989 年に確認されたのである。また、ニュートリノは、宇宙線が大気に衝突しても発生する。これを大気ニュートリノと呼び、これに含まれるミューニュートリノの数は理論的には電子ニュートリノの 2 倍あるはずなのだが、東京大学宇宙線研究所のスーパーカミオカンデのグループによる実験では、7 割以下しか観測されなかったのである (1998 年)。これらの現象から、電子ニュートリノとミューニュートリノが互いに移り変わっているに違いないということが分かる。これをニュートリノ振動と

いう。ニュートリノには今まで質量がないと思われていたが、この現象は、ニュートリノに質量があることの証拠であるといわれている。ただし、ニュートリノ振動からは、型の異なるニュートリノの質量差が測定されるのみで、質量の値は解からない。

ニュートリノに質量が少しでもあると、それは対称性の自発的破れによるものであり、3 種類のニュートリノ間での混合が生じる可能性がある。質量の異なる 3 つのニュートリノの質量固有状態を ν_1、ν_2、ν_3 とする。そしてこれらが混じり合って、現実のフレーバーの固有状態である、電子ニュートリノ、ミューニュートリノ、タウニュートリノが構成されると考える。簡単のために 2 つの粒子、電子ニュートリノとミューニュートリノは ν_1 と ν_2 が混合していると考えると、混合角 θ を用いて次のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

最初に作られた時に電子ニュートリノだとすると、ニュートリノの質量の固有状態の時間発展は量子力学の基本方程式であるシュレディンガー方程式で記述される。

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = E_\nu \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

この方程式は簡単に解くと、

$$|\nu_1(t) >= e^{-iE_\nu t}|\nu_1 > \tag{1.4}$$

となる。つまり、

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-iE_{\nu_1}t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_{\nu_2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

である。このエネルギー E_ν は、質量の固有状態 $\nu_i \;:\; i = 1,2$ に対して、次のように表わせる。

$$E = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \tag{1.6}$$

$$\simeq p_i + \frac{m_i^2}{2p_i} \tag{1.7}$$

$$\simeq p_i^2 \tag{1.8}$$

ここでは、p_i、m_i $(m_1 < m_2)$ は質量の固有状態に対応する、運動量と質量である。但し、$m_i^2 \ll p_i$ としている。以上の結果を踏まえて、フレーバーの固有状態の時間変化は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ip_1t} & 0 \\ 0 & e^{-ip_2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

ここで重要なのは、ある時間経過後の状態はもはや、弱い相互作用の固有状態でなく、2 つの相互作用の固有状態の混合状態になっているということである。ニュートリノを実験的に検出するには、ニュートリノの弱い相互作用を利用するわけであるから、検出地点でニュートリノは実験的に検出するには、ニュートリノは弱い相互作用の固有状態である必要がある。しかし、発生点であるニュートリノとして作られてもある距離運動した後の検出地点でのそのニュートリノが検出される確率は 1 ではなく、以下のように表わされる。時間 t 後に観測される確率は電子ニュートリノについて考える。

$$P(\nu_e(0) \to \nu_e(t)) = | < \nu_e(0)|\nu_e(t) > |^2 \tag{1.10}$$

$$= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{p_2 - p_1}{2} t \tag{1.11}$$

ニュートリノの振動長を L、時間 t の間にニュートリノが走る距離を R とするならば、

$$P(\nu_e(0) \to \nu_e(t)) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\pi R}{L} \tag{1.12}$$

となる。この振動長 L は、

$$L \equiv \frac{4\pi E}{(m_2 - m_1)^2} \tag{1.13}$$

である。このことから、ニュートリノの混合角が大きいと ($\sin^2 2\theta$〜1)、電子ニュートリノとして作られても、検出地点ではミューニュートリノに代わってしまい検出されない可能性がある。このニュートリノ振動が、理論値よりも実際に検出されるニュートリノの量が少ない可能性があることを示唆する。また、ν_1 と ν_2 の質量の違いが十分大きいと、速度の差によってこれらはすぐに分離するが、質量の違いが極めて小さいと ν_1 と ν_2 は重なったまま非常に長い距離を飛行し、飛行中に、電子ニュートリノ ν_e とミューニュートリノ ν_μ の間で「転換」が起こり、最初ミューニュートリノ ν_μ だけであったビームに電子ニュートリノ ν_e の成分が現れる。振動の周期は、2 つのニュートリノの質量差によって決まる。図 1.1 は、もし 2 つのニュートリノに質量差があったとして、ミューニュートリノが電子ニュートリノに転換していく割合を示している。

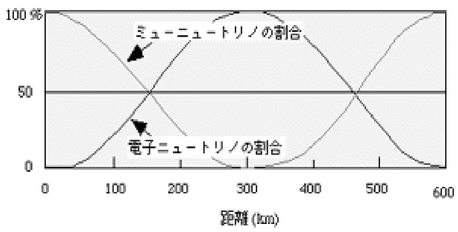

図 1.1: ミューニュートリノが電子ニュートリノに転換していく割合。

大気ニュートリノの観測では、ニュートリノが宇宙線によって何個作られたかを詳しく調べることができない。ニュートリノの数が減っているかどうかを詳しく調べるには、加速器でミューニュートリノを人工的に作りだしてやる方が確実である。人工的に発生させたニュートリノビームは、自然の大気ニュートリノより素性がはっきりしており、また発生直後にその性質を調べることができるので、実験結果の不定性が少なくすむ。筑波の高エネルギー加速器研究機構 (KEK) と岐阜県飛騨市神岡町の宇宙線研究所では、このニュートリノ振動を検証するために、人工ニュートリノを KEK で発生させて 250km 離れたスーパーカミオカンデ (神岡) に打ち込んで観測する K2K(KEK to 神岡) 実験を行った (1999 年から 2004 年)。この K2K 実験では、ミューニュートリノとタウニュートリノの振動を確認したが、電子ニュートリノは質量が小さいため確認できなかった。KEK と日本原子力研究開発機構とが共同で建設中の茨城県東海村の大強度陽子加速器施設 (J-PARC) では、2009 年に、K2K 実験の 100 倍の強度のニュートリノビームを作りだすことによって、検出事象数を 1 桁増やし、ミューニュートリノが電子ニュートリノに変わる現象を観測しようとしている (T2K 実験、Tokai to Kamioka)。これは、世界でも未発見の事象であり、これによって 3 つの種類のニュートリノの振動を確認できる。

1989 年の太陽ニュートリノによる実験などでは、電子ニュートリノからミューニュートリノという変化でのニュートリノ振動を計測した。1998 年の大気ニュートリノによる実験と、1999 年から 2004 年の K2K 実験では、ミューニュートリノからタウニュートリノというニュートリノ振動を計測した。しかし、ミューニュー

トリノから電子ニュートリノという変化はまだ計測されていない。この反応の検出を目指すのが、茨城県東海村に新設された大強度陽子加速器施設 (J-PARC) における T2K 実験 (東海 to 神岡) である。2008 年に稼働が開始され、2009 年から実験が開始される予定である。また、今まで比較的生成しやすかったミューニュートリノが絡まない、電子ニュートリノからタウニュートリノというニュートリノ振動は、最後のニュートリノ振動と呼ばれ、これを計測するプロジェクトが KASKA 実験である。この実験は、新潟県にある柏崎狩羽原子力発電所の地下に検出器を置いて測定を行う計画である。同原発が生成する電力量は世界一であり、この原発こそが地球上最大の人工ニュートリノ発生装置ということができる。

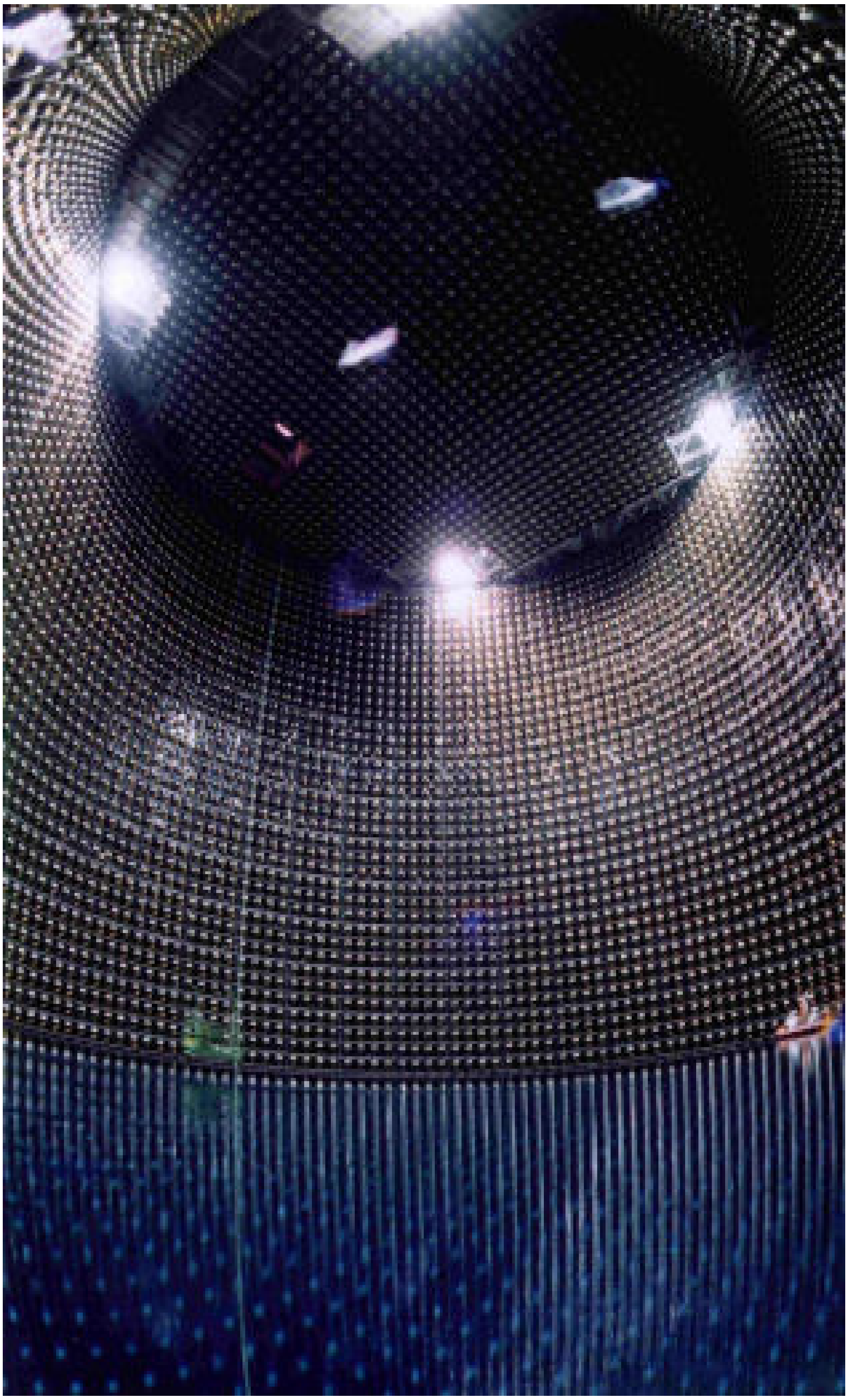

図 1.2: スーパーカミオカンデ。

1.2 高密度星

1.2.1 星の進化

恒星の進化とは、恒星として形成された時点から様々な過程を経てエネルギーを発生させ放出していくことと言える。すなわち、恒星の進化とは、エネルギーの発生過程と損失過程によって決まるのである。

恒星は星間ガスの収縮によって、誕生して以来エネルギーを生成放出してその形態を変化させる。この変化の過程は、誕生時の質量と密接な関係にある。そして、様々な進化の過程をたどり、やがて白色矮星や中性子星などの進化の最終段階へと至る。または、超新星爆発などの激しいエネルギー放出によって、その一生を終え星間ガスへと戻るものもある。しかし、これらに至るすべての過程で必ず星はエネルギーを放出している。このエネルギーの放出の仕方には、主に光子によるものとニュートリノによるものがある。それぞれの放出に関して考えていく。

まずは光子によるものから考える。恒星内部で起こる様々な核反応で発生した光子は、電磁相互作用をすることから、電子や原子核などに頻繁に散乱・吸収される。例えば、光子が電子によって散乱される時、光子の持つエネルギーによってコンプトン散乱またはトムソン散乱が起きる。特に恒星内部では光子のエネルギーが比較的小さいことから、トムソン散乱が問題となる。ここで具体的にトムソン散乱についてその断面積及びそれから求まる平均自由行程を計算する。まずトムソン散乱断面積 σ_{Th} は、

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6.65 \times 10^{-25}\mathrm{cm}^2 \tag{1.14}$$

であるから、平均自由行程 l は、平均密度 $\rho = 10^7\mathrm{gcm}^{-3}$ の白色矮星の場合、

$$l = \frac{1}{n\sigma_{Th}} = \frac{\mu_e M}{\rho\sigma_{Th}} \simeq 10^{-7}\mathrm{cm} \tag{1.15}$$

となる。ここで、n は電子数密度、M は陽子の質量、μ_e は平均分子量で、

$$\mu_e = \frac{A}{Z} \tag{1.16}$$

である。ただし、Z は原子番号、A は質量数である。これは、恒星の半径に明らかに満たないものであるので、恒星内部で発生した光子は直接恒星外部へ出ることができない。すなわち、光子による恒星のエネルギー損失は、恒星の表面付近のみで行われている。

次にニュートリノによるものを考える。ニュートリノは弱い相互作用のみ行うので、その散乱断面積も非常に小さい。先ほどの光子の時と同様に電子との散乱について計算を行う。

$$e^- + \nu_e \to e^- + \nu_e \tag{1.17}$$

についての散乱断面積 σ は、

$$\sigma \simeq 10^{-44}(\epsilon_\nu/\mathrm{MeV})^2\mathrm{cm}^2 \tag{1.18}$$

である。よって先ほど同様に、平均密度 $\rho = 10^7\mathrm{g\,cm}^{-3}$ の白色矮星の場合で、平均自由行程 l は、

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{\mu_e M}{\rho\sigma} \simeq 10^{13}\mathrm{cm}\ (\epsilon \simeq 1\mathrm{MeV}) \tag{1.19}$$

である。これは、恒星の半径を越えており、恒星内部で発生したニュートリノは直接恒星外部へ出ることができる。すなわち、ニュートリノによるエネルギー損失は光子によるものに比べより効率的に行われる。さらに、ニュートリノの発生 (熱的な場合に限る) は、恒星の密度及び温度の上昇によって急速に増加するので、高温・高密度であれば、よりニュートリノによる効果が強く効いてくる。特に白色矮星や中性子星などの、高温・高密度星の進化に対しては、光子によるエネルギー損失を大きく上回り、ニュートリノによるエネルギー損失がもっとも重要な効果として作用する。

1.2.2 白色矮星

恒星は主系列星以降、その質量によって様々な進化の過程をたどる。ここでは、白色矮星にいたるまでの進化、条件についてのみ考える。

H の燃焼段階である主系列星を終えた恒星は、中心部分に He の核ができ、その周囲を初期の元素で構成される殻 (やはり H の割合が非常に高い) に覆われる形となる。この段階で He 核は収縮するが、星全体は燃焼による熱を経て巨星へと進化する。ここでまず最初の質量による分岐が起こる。恒星の質量 M が太陽質量 $M_\odot$ に対して、

$$M < 0.5M_\odot \tag{1.20}$$

の場合は、He の燃焼が始まることは無く、H の燃焼がそのまま続いてほとんどが He からなる白色矮星となる。

また、

$$0.5M_\odot \leq M \leq 3M_\odot \tag{1.21}$$

の場合は、He 核の燃焼も始まり、He 核表層部での H の燃焼と同時に燃焼することとなる。その後の中心部の核は、C、O から構成されるものとなるが、次に進化することはなく、C、O からなる核と He の層、さらに主に H の外層から構成される白色矮星となる。

他のものについてはここでは進化を辿ることはしないが、その後の超新星爆発や熱パルスなどの過程を経てブラックホールや中性子星に進化する。または、再び星間ガスとなって新しい進化の過程をたどる。

白色矮星は、恒星進化の最終段階であり、内部の核燃料を使い果たし収縮する。よって、中心部分の密度が上昇し電子が縮退を始める。その間もエネルギーの放出は行われているので、最終的に電子の縮退圧で星が支えられていることになる。このようにしてできる白色矮星は、高温で高密度である。

図 1.3: 白色矮星ヴァン・マーネン。

1.3　ニュートリノ放射過程

1.3.1　ニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の研究の歴史

本論文では、ニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率を計算することを主なテーマとしている。そして、本論文にて考えるニュートリノ放射過程は次の 5 つである。

1. ペアニュートリノ放射過程 ⋯ 電子と陽電子が対消滅の際、ニュートリノを放射する過程。
2. フォトニュートリノ放射過程 ⋯ 光子と電子が相互作用をした際、電子に吸収された光子のエネルギー分をニュートリノとして放射する過程。
3. プラズマニュートリノ放射過程 ⋯ プラズマの振動を量子化した粒子プラズモンが最終的にニュートリノ・反ニュートリノ対に崩壊する過程。
4. ニュートリノ制動放射過程 ⋯ 電子がイオンの作るクーロン場によって制動を受ける際、その制動放射としてニュートリノを放射する過程。
5. 再結合ニュートリノ放射過程 ⋯ 自由電子がイオンに捕まりその軌道上の電子となる際、エネルギーの差分をニュートリノとして放射する過程。

各々の過程に関しての詳細な計算は次の章に示す。この章ではニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の研究の歴史について触れる。

ニュートリノ放射過程による恒星のエネルギー損失率の計算は、1967 年に G.Beaudet、V.Petrosian、E.E.Salpeter によって計算された。しかしこの当時、弱い相互作用に関する理論は、R.P.Feynman と M.Gell-Mann の理論によるもので、G.Beaudet、V.Petrosian、E.E.Salpeter においても、この R.P.Feynman と M.Gell-Mann の理論によって計算を行っていた。その後、S.Weinberg、A.Salam による電弱相互作用の理論が発表された。また、信頼性も向上してきたことから、この Weinberg-Salam 理論による計算が必要になってきた。

1973 年に D.A.Dicus は、この Weinberg-Salam 理論を使い、ペアニュートリノ過程、フォトニュートリノ過程、プラズマニュートリノ過程によるエネルギー損失率の計算を初めて行った。しかし、この研究結果は温度・密度領域で十分に広い範囲での計算をしていなかった等の理由から、1985 年に H.Munakata、Y.Kohyama、N.Itoh、1986 年に Y.Kohyama、N.Itoh、H.Munakata、1987 年に P.J.Schinder、D.N.Schramm、P.J.Wiita、S.H.Margolis、D.L.Tibbs、1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama、H.Munakata、1991 年に E.Braaten、1992 年に N.Itoh、H.Mutoh、A.Hikita、Y.Kohyama、1993 年に E.Braaten、D.Segel、1994 年に M.Haft、G.Raffelt、A.Weiss などによって再度多くの効果が研究、計算された。特に、1989 年の N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama、H.Munakata の計算では、ペアニュートリノ放射過程、フォトニュートリノ放射過程、プラズマニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の計算を、密度・温度領域が $10^{0.0} \leq \rho/\mu_e(\mathrm{g\ cm^{-3}}) \leq 10^{14.0}$、$10^{7.0} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{11.0}$ の範囲で計算した。温度領域 $10^{7.0} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{8.0}$ は、白色矮星などの高密度星の進化の研究で特に重要である。

また、ニュートリノ制動放射過程においても、さかんに計算が行われ、1983 年に N.Itoh、Y.Kohyama、1984 年に N.Itoh、N.Matsumoto、M.Seki、Y.Kohyama、1987 年に H.Munakata、Y.Kohyama、N.Itoh、などによってさらに次の段階の研究、計算等に必要な重要な結果を得て引用をされている。

再結合ニュートリノ放射過程においても、1993 年に Y.Kohyama、N.Itoh、A.Obama、H.Mutoh によって正確な研究が行われた。

これらの研究のそれぞれのニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の計算は、恒星の進化を考える研究などでは総合的に扱う必要がある。そこで、1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama、H.Munakata、1996 年に N.Itoh、H.Hayashi、A.Nishikawa、Y.Kohyama、は、ニュートリノ放射過程の総合評価を行ったのである。

1.3.2 Weinberg-Salam 理論

本論文は、Weinberg-Salam 理論によって計算を行っている。Weinberg-Salam 理論とは、電磁相互作用と弱い相互作用を統一する電弱統一理論である。

Weinberg-Salam 理論において、電磁相互作用と弱い相互作用が統一する電弱対称性を仮定すると、弱い相互作用に対して 4 種類のウィークボソン (W^+、W^-、W^0、B^0) が存在することになるが、これらはすべて質量を持たない。しかし、ヒッグス機構による自発的対称性の破れを仮定すると、荷電ウィークボソン (W^+、W^-) に大きな質量が生じ、中性ウィークボソン (W^0、B^0) が混合して、弱い相互作用の中性ゲージボソン Z^0、電磁相互作用のゲージボソンである光子 γ が生まれるのである。

その力を媒介するボーズ粒子を以下の表 1.3 に示す。

相互作用	ボーズ粒子	記号	質量
電磁相互作用	光子	γ	0
弱い相互作用	荷電ゲージボソン	$W^\pm$	81GeV
弱い相互作用	中性ゲージボソン	Z^0	92GeV

表 1.3: 力を媒介するボーズ粒子。

第2章　ニュートリノ放射過程

この章では、それぞれのニュートリノ放射過程について、ニュートリノのエネルギー損失率を考える。この章の流れは、2.1:ペアニュートリノ放射過程、2.2:フォトニュートリノ放射過程、2.3:プラズマニュートリノ放射過程、2.4:ニュートリノ制動放射過程、2.5:再結合ニュートリノ放射過程である。

2.1　ペアニュートリノ放射過程

電子と陽電子が対消滅の際、ニュートリノを放射する過程である。この過程は図 2.1 に示すような過程である。

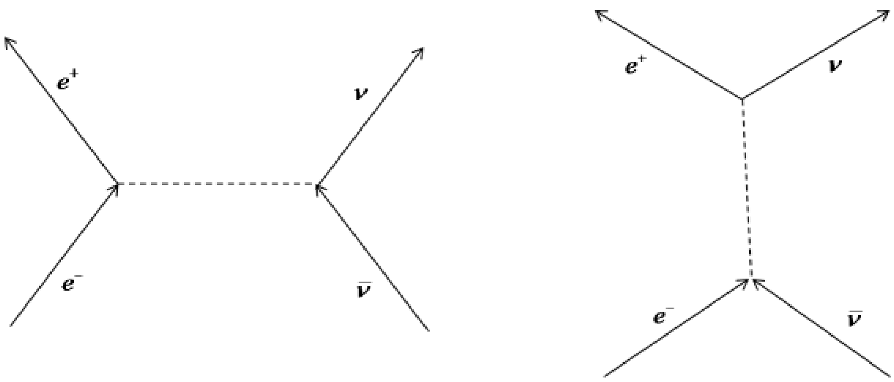

図 2.1: ペアニュートリノ放射過程のファインマンダイアグラム。

2.1.1　数値計算

この過程による単位時間、単位体積あたりのエネルギー損失率 Q_{pair} は、以下のように計算される。

$$Q_{pair} = \frac{G^2 m^9}{18\pi^5}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)\right]Q^+_{pair} + \frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 - C_A'^2\right)\right]Q^-_{pair}\right\} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} Q^+_{pair} =& 5\left(G_0^- G^+_{-\frac{1}{2}} + G^-_{-\frac{1}{2}} G_0^+\right) + 7\left(G_0^- G^+_{\frac{1}{2}} + G^-_{\frac{1}{2}} G_0^+\right) \\ & - 2\left(G_1^- G^+_{-\frac{1}{2}} + G^-_{-\frac{1}{2}} G_1^+\right) + 8\left(G_1^- G^+_{\frac{1}{2}} + G^-_{\frac{1}{2}} G_1^+\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$Q^{-}_{pair} = 9\left(G^{-}_{\frac{1}{2}}G^{+}_{0} + G^{-}_{0}G^{+}_{\frac{1}{2}}G^{-}_{0}G^{+}_{-\frac{1}{2}} + G^{-}_{-\frac{1}{2}}G^{+}_{0}\right) \tag{2.3}$$

ここで、G はフェルミ結合定数であり、

$$G = (1.02679 \pm 0.00002) \times 10^{-5} M^{-2} \tag{2.4}$$

となる。m は電子の質量、M は陽子の質量、n は電子の質量が温度 k_BT に対して無視できる電子ニュートリノ以外のニュートリノのフレーバー数である。

$$C_V = \frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W,\ \ C_A = \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

$$C'_V = 1 - C_V,\ \ C'_A = 1 - C_A \tag{2.6}$$

$$\sin^2\theta_W = 0.2319 \pm 0.0005 \tag{2.7}$$

$$G^{\pm}_n(\lambda,\nu) = \lambda^{3+2n}\int_{\lambda^{-1}}^{\infty}\frac{x^{2n+1}(x^2-\lambda^{-2})^{1/2}}{1+e^{x\pm\nu}}dx \tag{2.8}$$

$$\lambda = \frac{k_BT}{mc^2} = \frac{T}{5.930\times 10^9\mathrm{K}} \tag{2.9}$$

θ_W はワインバーグ角である。また、μ は静止質量を含む電子の化学ポテンシャルとすると、

$$\nu = \frac{\mu}{k_BT} \tag{2.10}$$

である。

2.1.2 解析フィッティング式

	a_0	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3	c
$T < 10^{10.0}$(K)......	6.002E+19	2.084E+20	1.872E+21	9.383E-1	-4.141E-1	5.829E-2	5.5924
$T \geq 10^{10.0}$(K)......	6.002E+19	2.084E+20	1.872E+21	1.2383	-0.8141	0	4.9924

表 2.1: ペアニュートリノ放射過程フィッティング係数。

$$Q_{pair} = \frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)\right]\left[1 + \frac{\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 - C_A'^2\right)}{\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)}q_{pair}\right]g(\lambda)\,e^{-2/\lambda}f_{pair} \tag{2.11}$$

$$q_{pair} = \left(10.7480\lambda^2 + 0.3967\lambda^{0.5} + 1.0050\right)^{-1.0}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)\left(7.692\times 10^7\lambda^3 + 9.715\times 10^6\lambda^{0.5}\right)\right]^{-0.3} \tag{2.12}$$

$$f_{pair} = \frac{\left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2\right)e^{-c\xi}}{\xi^3 + b_1\lambda^{-1} + b_2\lambda^{-2} + b_3\lambda^{-3}} \tag{2.13}$$

$$g(\lambda) = 1 - 13.04\lambda^2 + 133.5\lambda^4 + 1534\lambda^6 + 918.6\lambda^8 \tag{2.14}$$

フィッティング式の精度は、$T > 10^{9.0}$(K) において約 3%以内の誤差である。フィッティング係数 a_i, b_i, c を表 2.1 に示す。

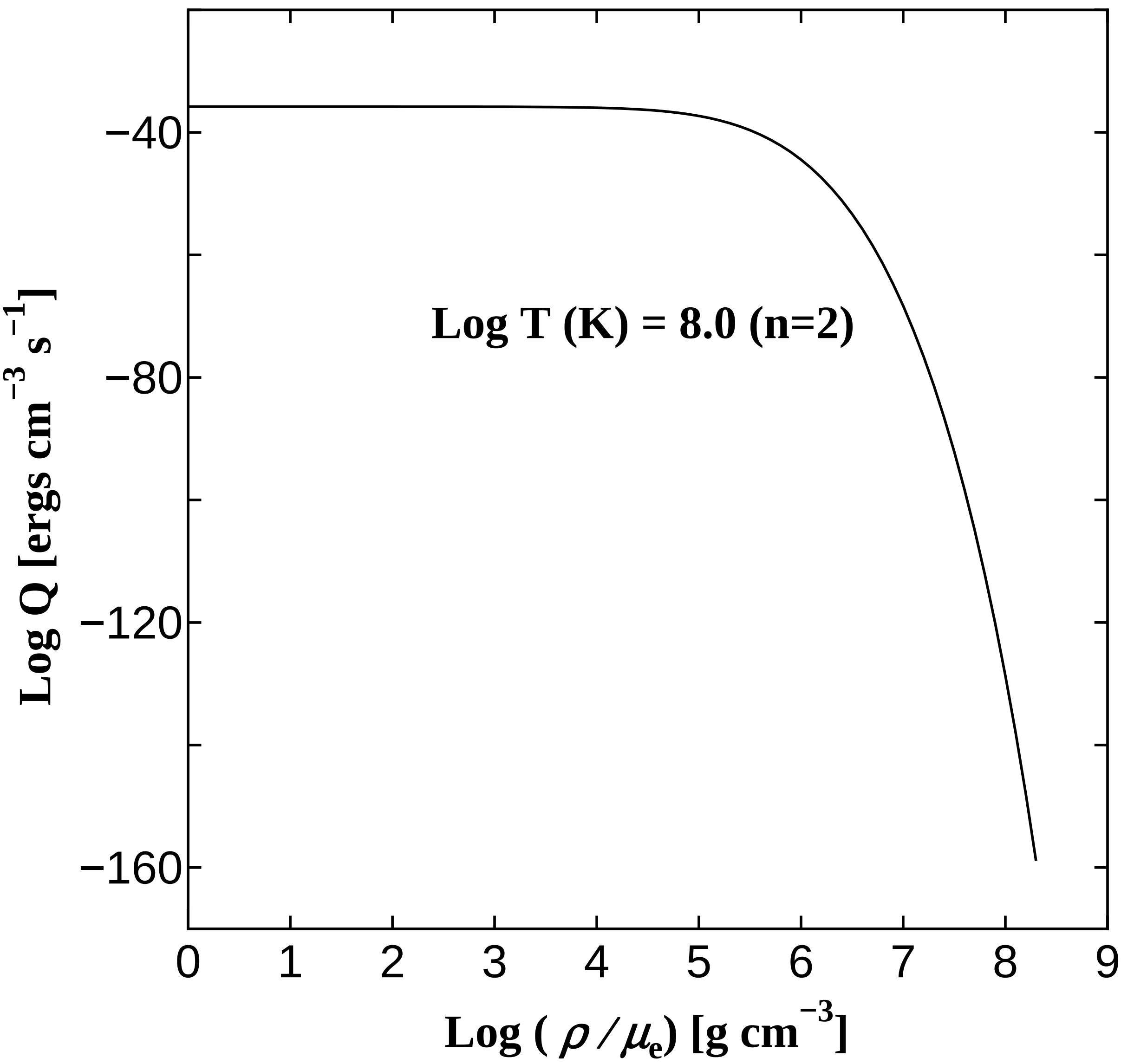

図 2.2: $T = 10^8$K のときのペアニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

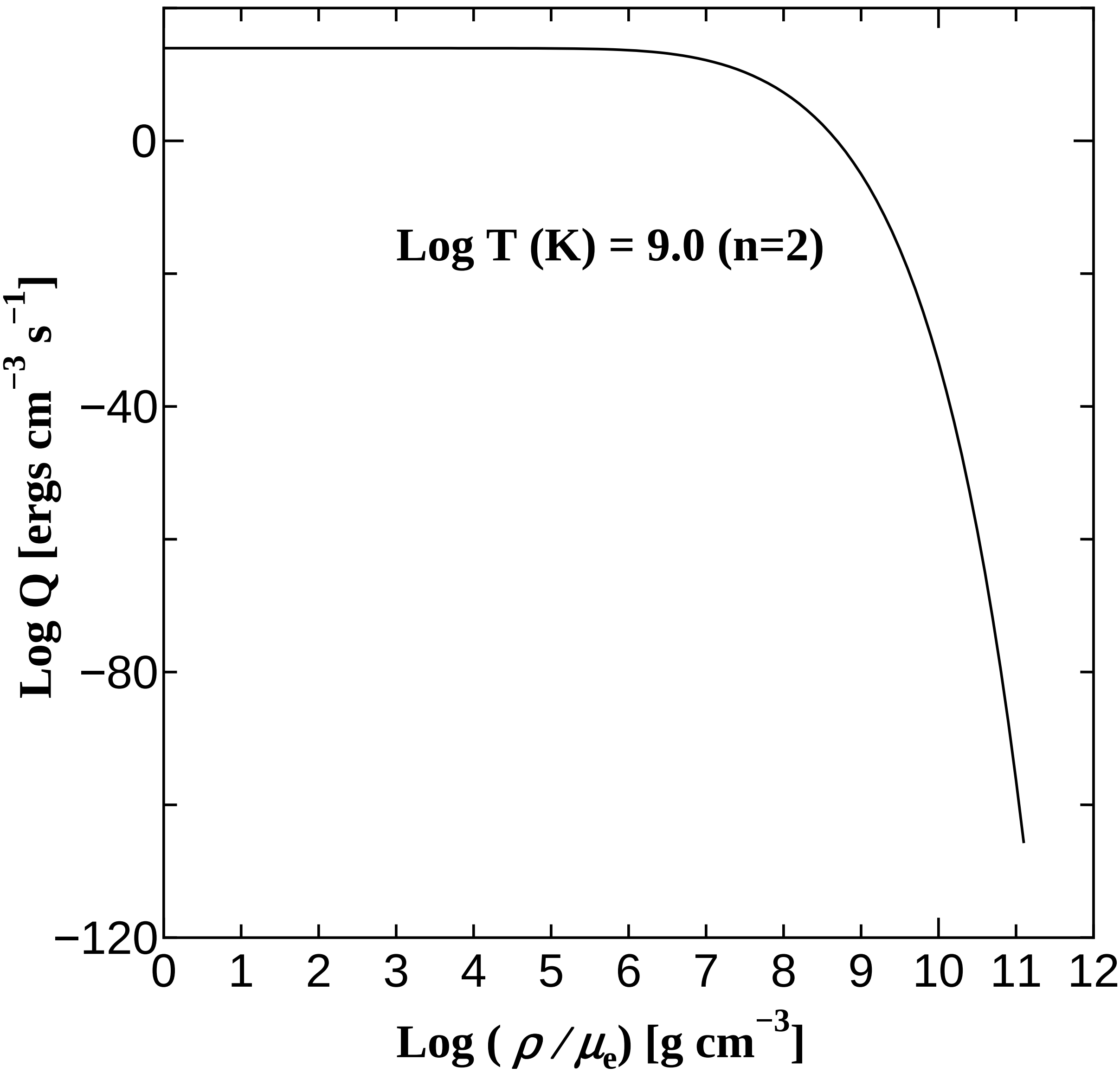

図 2.3: $T = 10^9$K のときのペアニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

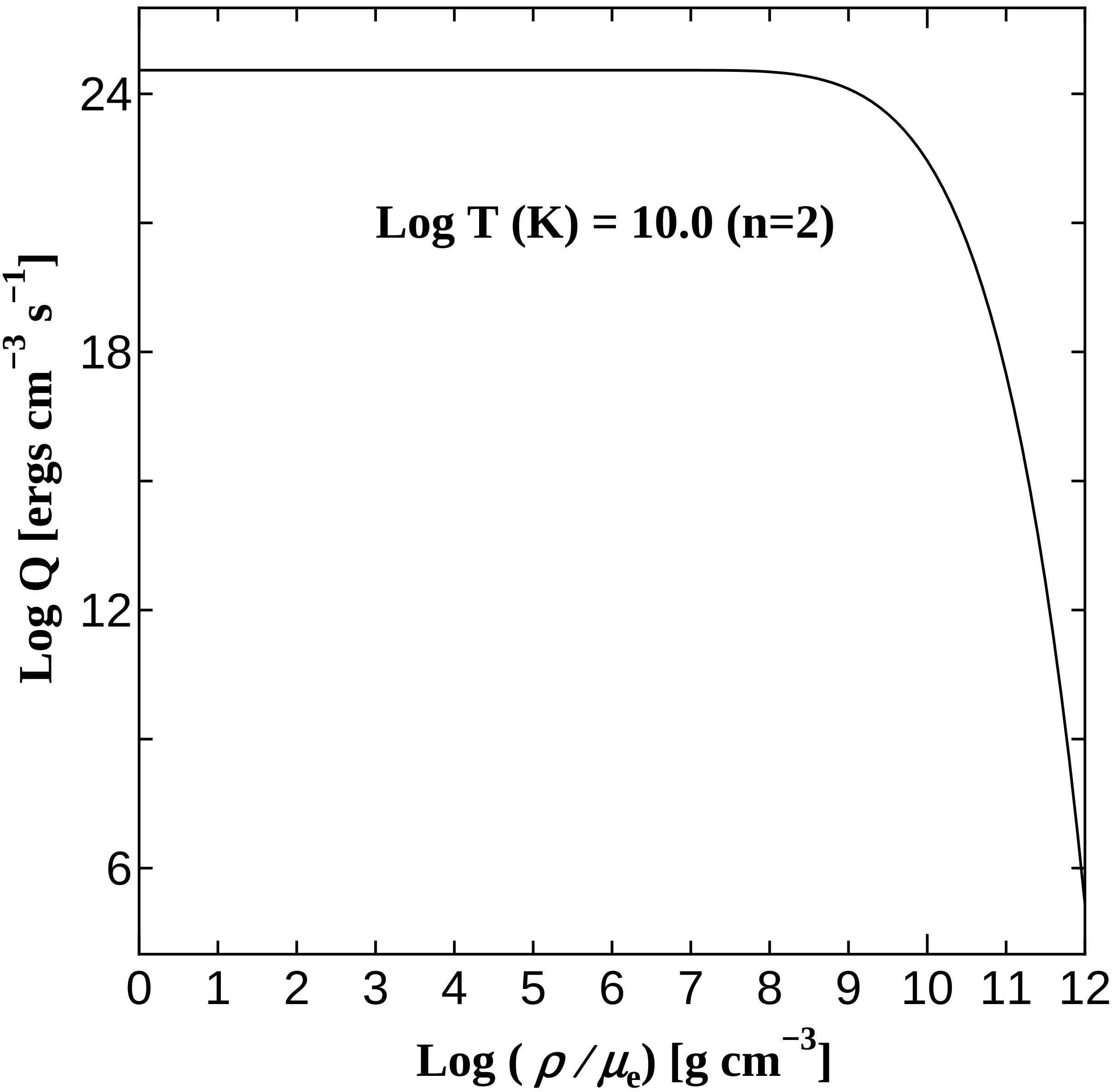

図 2.4: $T = 10^{10}$K のときのペアニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

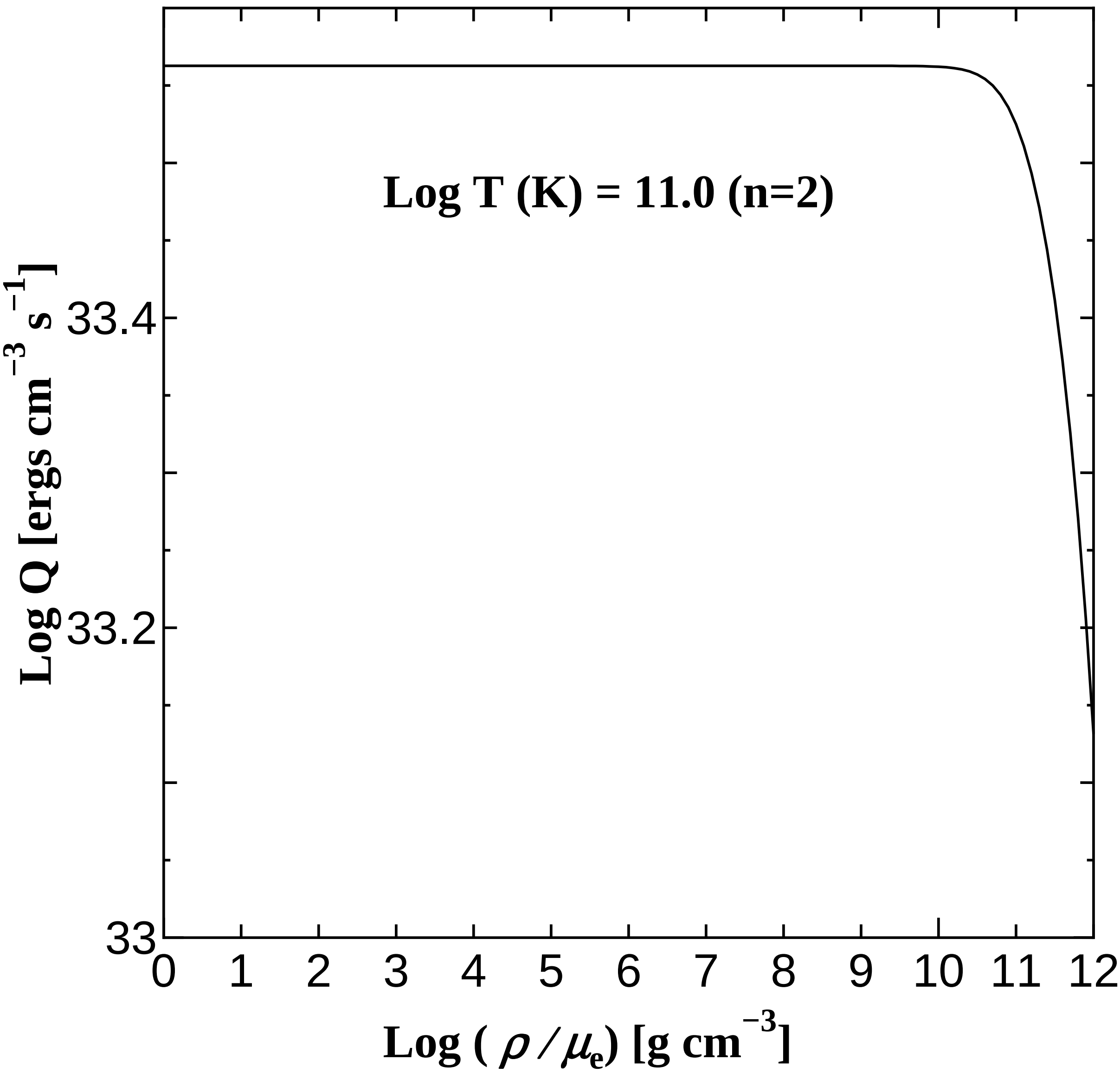

図 2.5: $T = 10^{11}$K のときのペアニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

2.2 フォトニュートリノ放射過程

光子と電子が相互作用した際、電子に吸収された光子のエネルギー分をニュートリノとして放射する過程である。この過程は図 2.6 に示すような過程である。

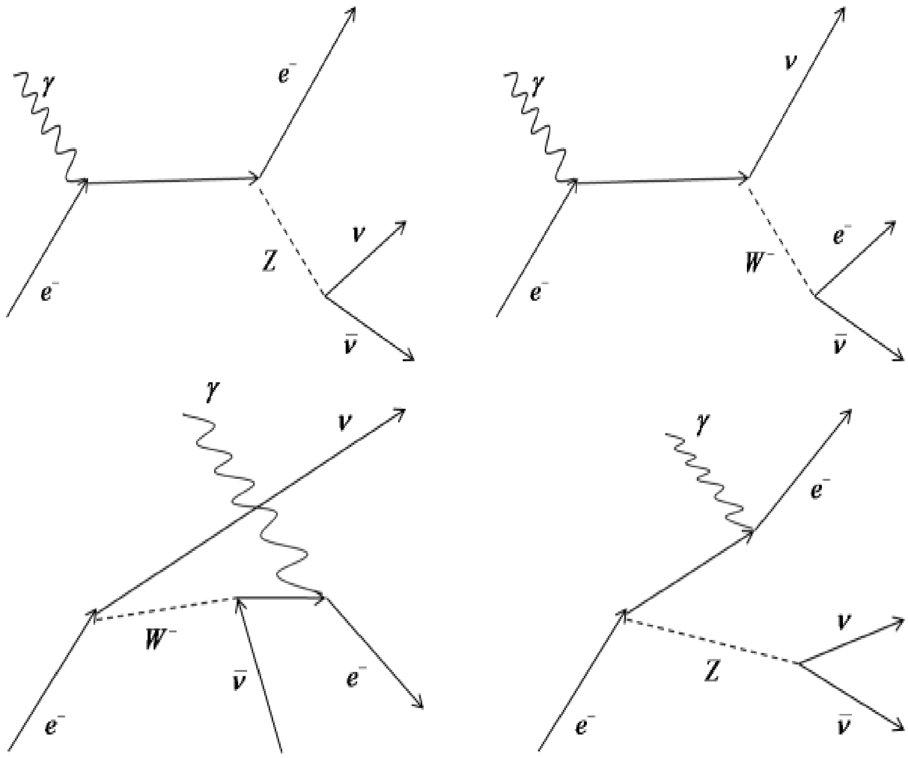

図 2.6: フォトニュートリノ放射過程のファインマンダイアグラム。

フォトニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の計算は、1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama によって計算されたものが現在も多くの研究で引用されている。1989 年当時の計算は、数値計算の 5 重積分は当時のコンピュータの性能という問題から Monte Carlo 法を用いて計算されている。しかし、本論文の計算は、Monte Carlo 法を用いずに数値計算を行った。さらに、本論文では論文 [17] の光子の分散関係も考慮に含めて計算を行った。ただし、$T = 10^{11}$K のときは、この光子の分散関係が発散してしまうため考慮に含めた計算は行っていない。(詳細な計算は、付録 A を参照。)

2.2.1 数値計算

この過程による単位時間単位体積あたりのエネルギー損失率 Q_{photo} は、以下のように計算される。

$$Q_{photo} = Q_- + Q_+ \tag{2.15}$$

$$Q_{\pm}=\frac{1}{4\left(2\pi\right)^{7}}\int_{0}^{\infty}\frac{p_{1}^{2}dp_{1}}{E_{1}}f^{\pm}\left(E_{1}\right)\int_{0}^{\infty}\frac{k^{2}dk}{\omega}g\left(\omega\right)\int_{-1}^{1}dz\int\frac{d^{3}p_{2}}{E_{2}}\left[1-f^{\pm}\left(E_{2}\right)\right]\left(E_{1}+\omega-E_{2}\right)I \tag{2.16}$$

$$z\equiv\frac{\vec{p}_{1}\cdot\vec{k}}{\left|\vec{p}_{1}\right|\left|\vec{k}\right|} \tag{2.17}$$

ここで $(E_1,\vec{p}_1)$ と $(E_2,\vec{p}_2)$ は、それぞれ入射電子と放出電子のエネルギーと運動量であり、$(\omega,\vec{k})$ は入射光子のエネルギーと運動量である。そして、式 (2.16) 内の因子 I は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}I\equiv&\frac{2G^{2}e^{2}}{3\pi}\left[\left(C_{V}^{2}+C_{A}^{2}\right)+n\left(C_{V}^{\prime2}+C_{A}^{\prime2}\right)\right]\\&\times\Bigg\{4P^{2}+2\beta^{\gamma}\left(P^{2}+m^{2}\right)\left(k\cdot P\right)^{2}+2\beta\gamma\omega_{0}^{2}P^{2}\left[P^{2}-2m^{2}-\left(k\cdot P\right)+\frac{1}{2}\omega_{0}^{2}\right]\\&+\frac{1}{2}\left(\beta-\gamma\right)^{2}\omega_{0}^{2}P^{2}\left(P^{2}-m^{2}\right)+\left[\gamma^{2}P^{2}\left(P^{2}-m^{2}\right)+\beta\gamma\omega_{0}^{2}\left(P^{2}+m^{2}\right)\right]\\&\times\frac{1}{\left(p_{1}\cdot k\right)^{2}-m^{2}\omega_{0}^{2}}\left[2\beta^{-1}\gamma^{-1}\left(m^{2}-p_{1}\cdot p_{2}\right)+m^{2}\left(k\cdot P\right)^{2}-\frac{1}{2}\omega_{0}^{2}P^{2}\left(m^{2}+p_{1}\cdot p_{2}\right)\right]\Bigg\}\\&+\frac{2G^{2}e^{2}}{3\pi}m^{2}\left[\left(C_{V}^{2}-C_{A}^{2}\right)+n\left(C_{V}^{\prime2}-C_{A}^{\prime2}\right)\right]\\&\times\Bigg\{\frac{1}{2}\left(3\beta^{2}+2\beta\gamma+3\gamma^{2}\right)\omega_{0}^{2}P^{2}-2\beta\gamma\left(k\cdot P\right)^{2}\\&+\frac{3\gamma^{2}P^{2}-\beta\gamma\omega_{0}^{2}}{\left(p_{1}\cdot k\right)^{2}-m^{2}\omega_{0}^{2}}\left[2\beta^{-1}\gamma^{-1}\left(m^{2}-p_{1}\cdot p_{2}\right)+m^{2}\left(k\cdot P\right)^{2}-\frac{1}{2}\omega_{0}^{2}P^{2}\left(m^{2}+p_{1}\cdot p_{2}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Q_- と Q_+ はそれぞれ電子と陽電子による寄与である。そして $f^-(E)$ と $f^+(E)$ はそれぞれ電子と陽電子のフェルミ分布関数である。

$$f^{\mp}(E)=\frac{1}{\exp(E/k_BT\mp\nu)+1} \tag{2.19}$$

$g(\omega)$ は、光子のプランク分布関数である。

$$g(\omega)=\frac{1}{\exp(\omega/k_BT)-1} \tag{2.20}$$

式 (2.18) に出てくる文字は以下の通りである。

$$P=p_1+k-p_2 \tag{2.21}$$

$$\beta^{-1}=(k\cdot p_1)+\frac{1}{2}\omega_0^2 \tag{2.22}$$

$$\gamma^{-1}=(k\cdot p_2)-\frac{1}{2}\omega_0^2 \tag{2.23}$$

ここで ω_0 は、電子のプラズマ振動数である。

以上の式は以下のようにすべて書き直すことができる。

$$\begin{aligned}Q_{\pm}=&\frac{\left(Gm^{2}\right)^{2}\alpha}{12\pi^{6}}\left(k_{B}T\right)^{5}\int_{\lambda^{-1}}^{\infty}\frac{\left(x^{2}-\lambda^{-2}\right)^{1/2}}{e^{x\pm\nu}+1}dx\int_{\gamma}^{\infty}\frac{\left(x+y\right)}{e^{y}-1}\left(y^{2}-\gamma^{2}\right)^{1/2}dy\int_{-1}^{1}dy\frac{1}{D^{2}\left(D+2\right)}\\&\times\int_{0}^{1}\frac{t^{2}dt}{S}\int_{-1}^{1}dz\left(1-\frac{S+Gtz}{D+2}\right)\frac{J}{1+\exp\left[-\left(x+y\right)\left(S+Gtz\right)/\left(D+2\right)\mp\nu\right]}\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$
\begin{aligned}
J =& \frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)\right] \\
&\times \left[(1 + D - S)\,N + (1 + D - S)\left(1 - S + \frac{D}{2}\right)H + \left(1 - S + \frac{3}{2}D\right)M\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 - C_A^2\right) + \left(C_V'^2 - C_A'^2\right)\right]\left[V + (1 + D - S)\,W\right]
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

$$N = 2 + C\left[1 + L\,(2 + C - 4S)\,F^{-1/2}\right] \tag{2.26}$$

$$H = \frac{1}{2}C\left(1 - 4LF^{-1/2} + 4L^2aF^{-3/2}\right) + EL\left[1 - 2UF^{-1/2} + a\left(U^2 - K^2t^2\right)F^{-3/2}\right] \tag{2.27}$$

$$M = \left(2LF^{-1/2} + \frac{a}{2L} - 2\right) + \frac{EC}{4}\left[a - 2U + \left(U^2 - K^2t^2\right)F^{-1/2}\right] \tag{2.28}$$

$$V = -\frac{1}{2}DM \tag{2.29}$$

$$W = \frac{1}{4}D\left\{C\left(3 + 4LF^{-1/2} + 12L^2aF^{-3/2}\right) + 6LE\left[1 - 2UF^{-1/2} + a\left(U^2 - K^2t^2\right)F^{-3/2}\right]\right\} \tag{2.30}$$

$$a = U - Btz \tag{2.31}$$

$$b = \left(1 - z^2\right)^{1/2}\left(K^2 - B^2\right)^{1/2}t \tag{2.32}$$

$$B = \frac{2Ly - x - y}{(x + y)\,G} \tag{2.33}$$

$$C = \lambda^2\gamma^2 D \tag{2.34}$$

$$D = \lambda^{-2}\left\{xy - \left[\left(x^2 - \lambda^{-2}\right)\left(y^2 - \gamma^2\right)\right]^{1/2}w + \frac{\gamma^2}{2}\right\}^{-1} \tag{2.35}$$

$$E = \frac{4}{C + 2 - 4CL} \tag{2.36}$$

$$F = a^2 - b^2 \tag{2.37}$$

$$G = \left[1 - \frac{D + 2}{D\lambda^2\,(x + y)^2}\right]^{1/2} \tag{2.38}$$

$$K = \frac{2}{\left[E\,(C + 2)\right]^{1/2}} \tag{2.39}$$

$$L = \frac{D + 2}{C + 2} \tag{2.40}$$

$$S = \left[t^2 + D\,(D + 2)\right]^{1/2} \tag{2.41}$$

$$U = S - CL \tag{2.42}$$

$$\gamma = \frac{\hbar\omega_0}{k_BT} \tag{2.43}$$

式 (2.24) で、α は微細構造定数である。

1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama が行った計算と、本論文で行った計算の比較は、図 2.12 から図 2.24 に示す。

2.2.2 解析フィッティング式

$$Q_{photo} = \frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)\right]\left[1 - \frac{\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 - C_A'^2\right)}{\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)} q_{photo}\right]\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)\lambda^5 f_{photo} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} q_{photo} =& 0.666\left(1 + 2.045\lambda\right)^{-2.066} \\ &\times\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)\left(1.875\times 10^8\lambda + 1.653\times 10^8\lambda^2 + 8.499\times 10^8\lambda^3 - 1.604\times 10^8\lambda^4\right)^{-1.0}\right]^{-1.0} \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$f_{photo} = \frac{\left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2\right)e^{-c\xi}}{\xi^3 + b_1\lambda^{-1} + b_2\lambda^{-2} + b_3\lambda^{-3}} \tag{2.46}$$

$$b_1 = 6.290\times 10^{-3} \tag{2.47}$$

$$b_2 = 7.483\times 10^{-3} \tag{2.48}$$

$$b_3 = 3.061\times 10^{-4} \tag{2.49}$$

$$c = \begin{cases} 0.5654 + \log_{10}\left(T/10^{7.0}\mathrm{K}\right) & 10^{7.0} \le T(\mathrm{K}) < 10^{8.0} \text{ のとき} \\ 1.5654 & 10^{8.0} \le T(\mathrm{K}) \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.50}$$

$$a_i = \frac{1}{2}c_{i0} + \sum_{j=1}^{5}\left[c_{ij}\cos\left(\frac{5}{3}\pi j\tau\right) + d_{ij}\sin\left(\frac{5}{3}\pi j\tau\right)\right] + \frac{1}{2}c_{i6}\cos\left(10\pi\tau\right) \quad (i = 0, 1, 2) \tag{2.51}$$

$$\tau = \begin{cases} \log_{10}\left(T/10^{7.0}\mathrm{K}\right) & 10^{7.0} \le T(\mathrm{K}) < 10^{8.0} \text{ のとき} \\ \log_{10}\left(T/10^{8.0}\mathrm{K}\right) & 10^{8.0} \le T(\mathrm{K}) < 10^{9.0} \text{ のとき} \\ \log_{10}\left(T/10^{9.0}\mathrm{K}\right) & 10^{9.0} \le T(\mathrm{K}) \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.52}$$

フィッティング式が適応する密度・温度領域は、$10^{0.0} \le \rho/\mu_e(\mathrm{g\ cm^{-3}}) \le 10^{11.0}$、$10^{7.0} \le T(\mathrm{K}) \le 10^{11.0}$ である。フィッティング式の精度は、この過程が支配的となる密度・温度領域では約 1% 以内の誤差であり、その他の領域では 3% 以内の誤差である。フィッティング係数 c_{ij}, d_{ij} を表 2.2、表 2.3 に示す。

i	j						
	0	1	2	3	4	5	6
				$10^{7.0} \leq T(\mathrm{K}) < 10^{8.0}$			
0......	1.008E+11	0	0	0	0	0	0
1......	8.156E+10	9.728E+8	-3.806E+9	-4.384E+9	-5.774E+9	-5.249E+9	-5.153E+9
2......	1.067E+11	-9.782E+9	-7.193E+9	-6.936E+9	-6.893E+9	-7.041E+9	-7.193E+9
				$10^{8.0} \leq T(\mathrm{K}) < 10^{9.0}$			
0......	9.889E+10	-4.524E+8	-6.088E+6	4.269E+7	5.172E+7	4.910E+7	4.388E+7
1......	1.813E+11	-7.556E+9	-3.304E+9	-1.031E+9	-1.764E+9	-1.851E+9	-1.928E+9
2......	9.750E+10	3.484E+10	5.199E+9	-1.695E+9	-2.865E+9	-3.395E+9	-3.418E+9
				$10^{9.0} \leq T(\mathrm{K})$			
0......	9.581E+10	4.107E+8	2.305E+8	2.236E+8	1.580E+8	2.165E+8	1.721E+8
1......	1.459E+12	1.314E+11	-1.169E+11	-1.765E+11	-1.867E+11	-1.983E+11	-1.896E+11
2......	2.424E+11	-3.669E+9	-8.691E+9	-7.967E+9	-7.932E+9	-7.987E+9	-8.333E+9

表 2.2: フォトニュートリノ放射過程フィッティング係数 c_{ij}。

i	j				
	1	2	3	4	5
			$10^{7.0} \leq T(\mathrm{K}) < 10^{8.0}$		
0......	0	0	0	0	0
1......	-1.879E+10	-9.667E+9	-5.602E+9	-3.370E+9	-1.825E+9
2......	-2.919E+10	-1.185E+10	-7.270E+9	-4.222E+9	-1.560E+9
			$10^{8.0} \leq T(\mathrm{K}) < 10^{9.0}$		
0......	-1.135E+8	1.256E+8	5.149E+7	3.436E+7	1.005E+7
1......	1.652E+9	-3.119E+9	-1.839E+9	-1.458E+9	-8.956E+8
2......	-1.548E+10	-9.338E+9	-5.899E+9	-3.035E+9	-1.598E+9
			$10^{9.0} \leq T(\mathrm{K})$		
0......	4.724E+8	2.976E+8	2.242E+8	7.937E+7	4.859E+7
1......	-7.094E+11	3.697E+11	-2.189E+11	-1.273E+11	-5.705E+10
2......	-2.254E+10	-1.551E+10	-7.793E+9	-4.489E+9	-2.185E+9

表 2.3: フォトニュートリノ放射過程フィッティング係数 d_{ij}。

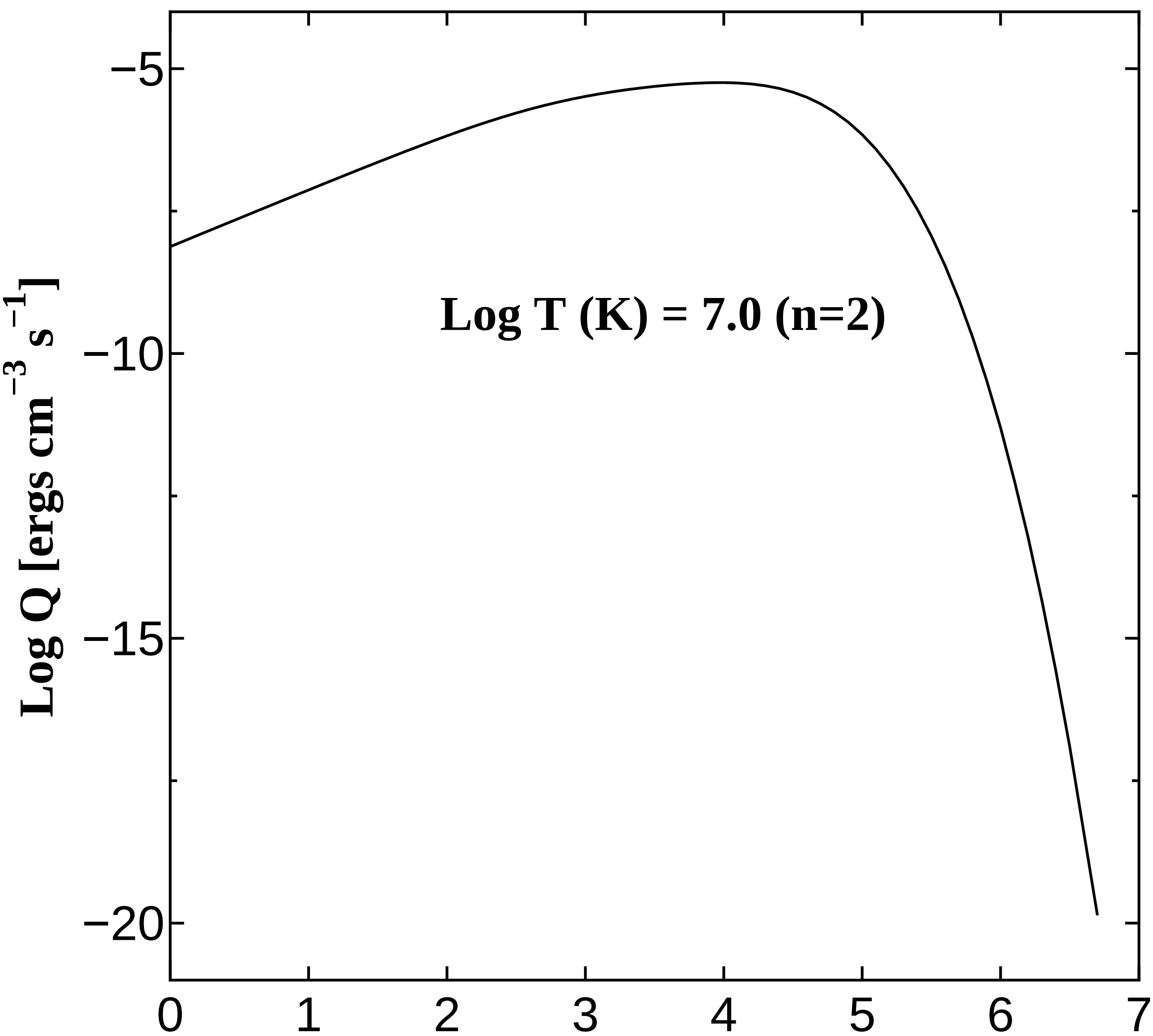

図 2.7: $T = 10^7$K のときのフォトニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

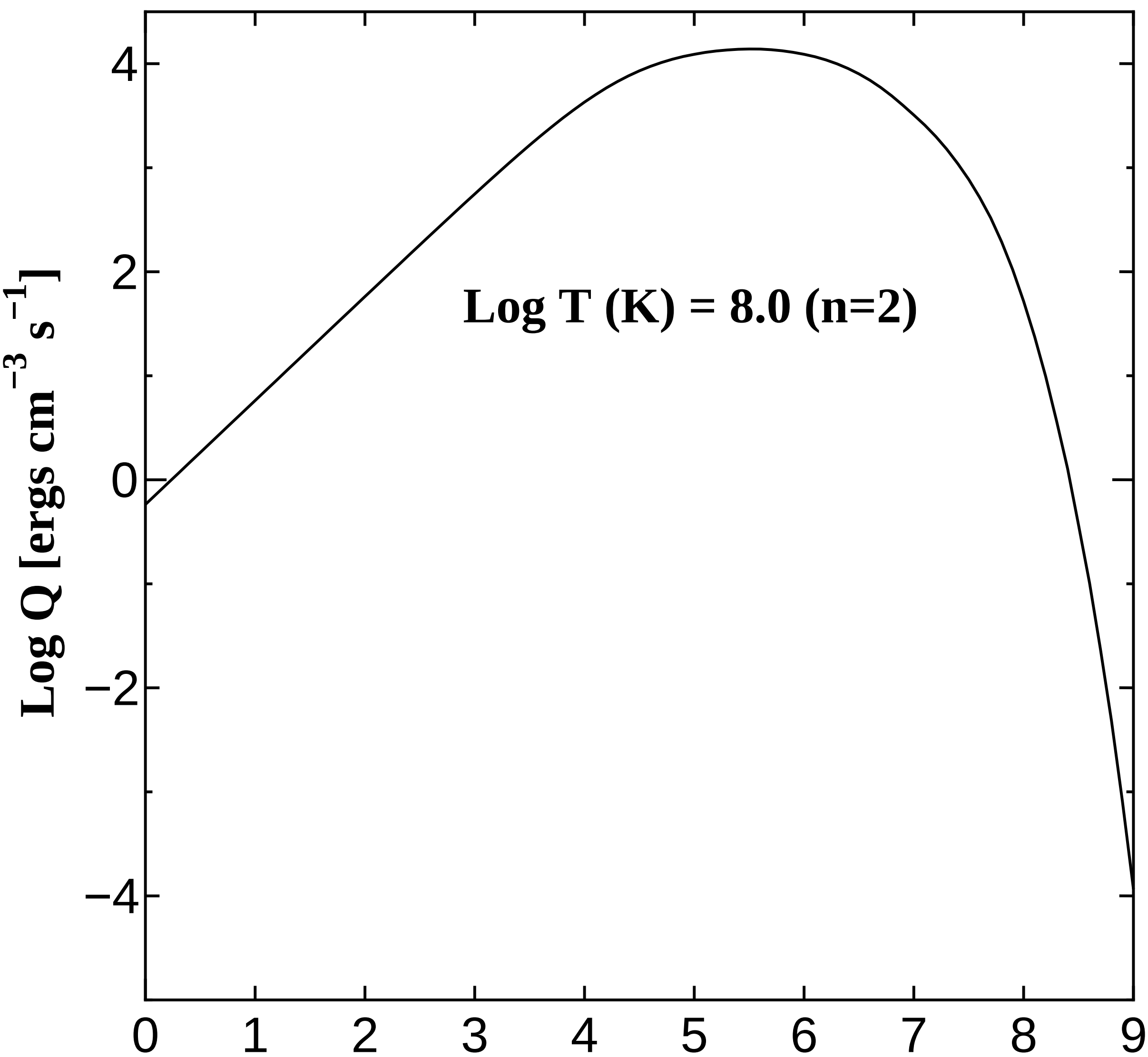

図 2.8: $T = 10^8$K のときのフォトニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

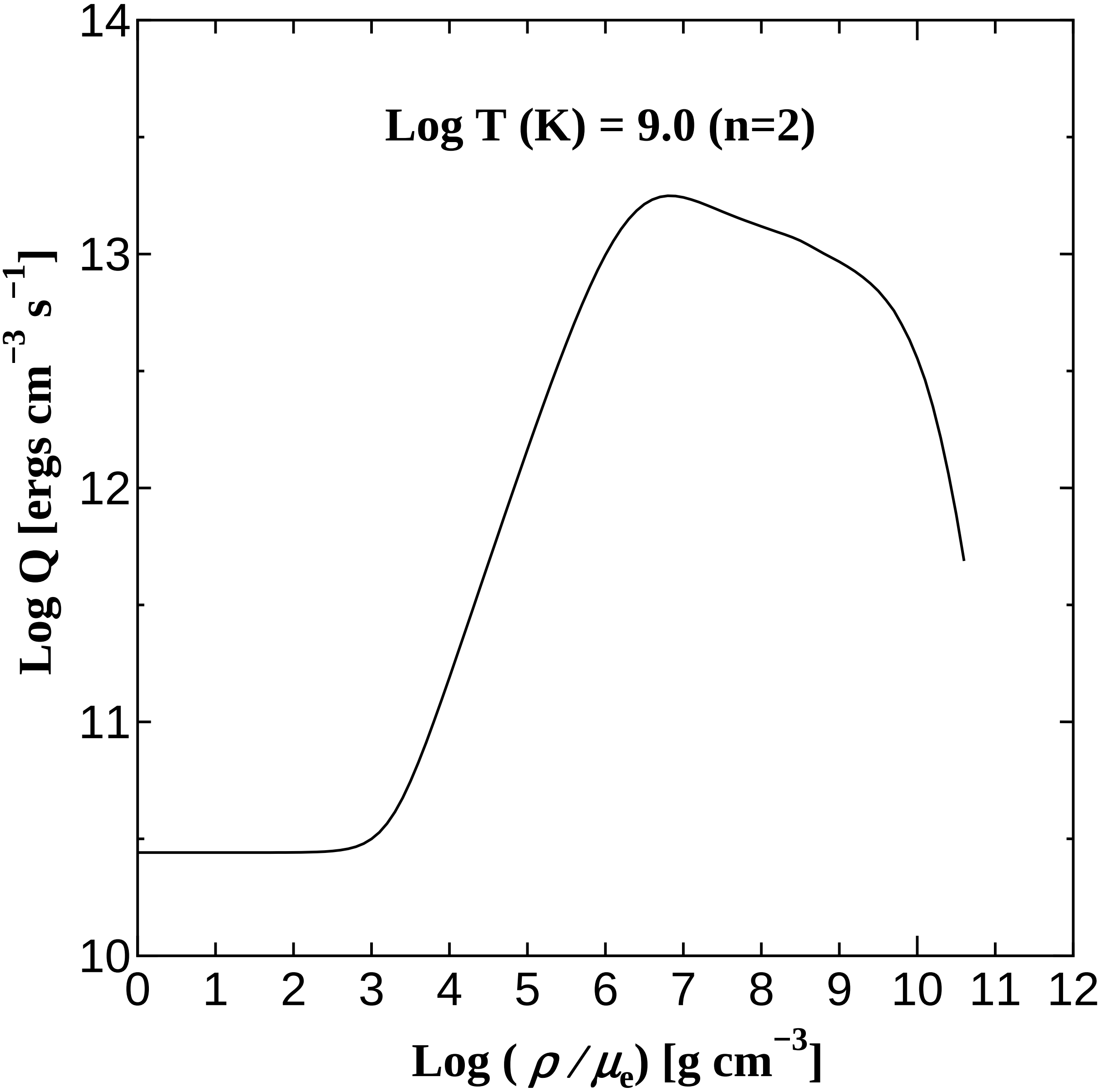

図 2.9: $T = 10^9$K のときのフォトニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

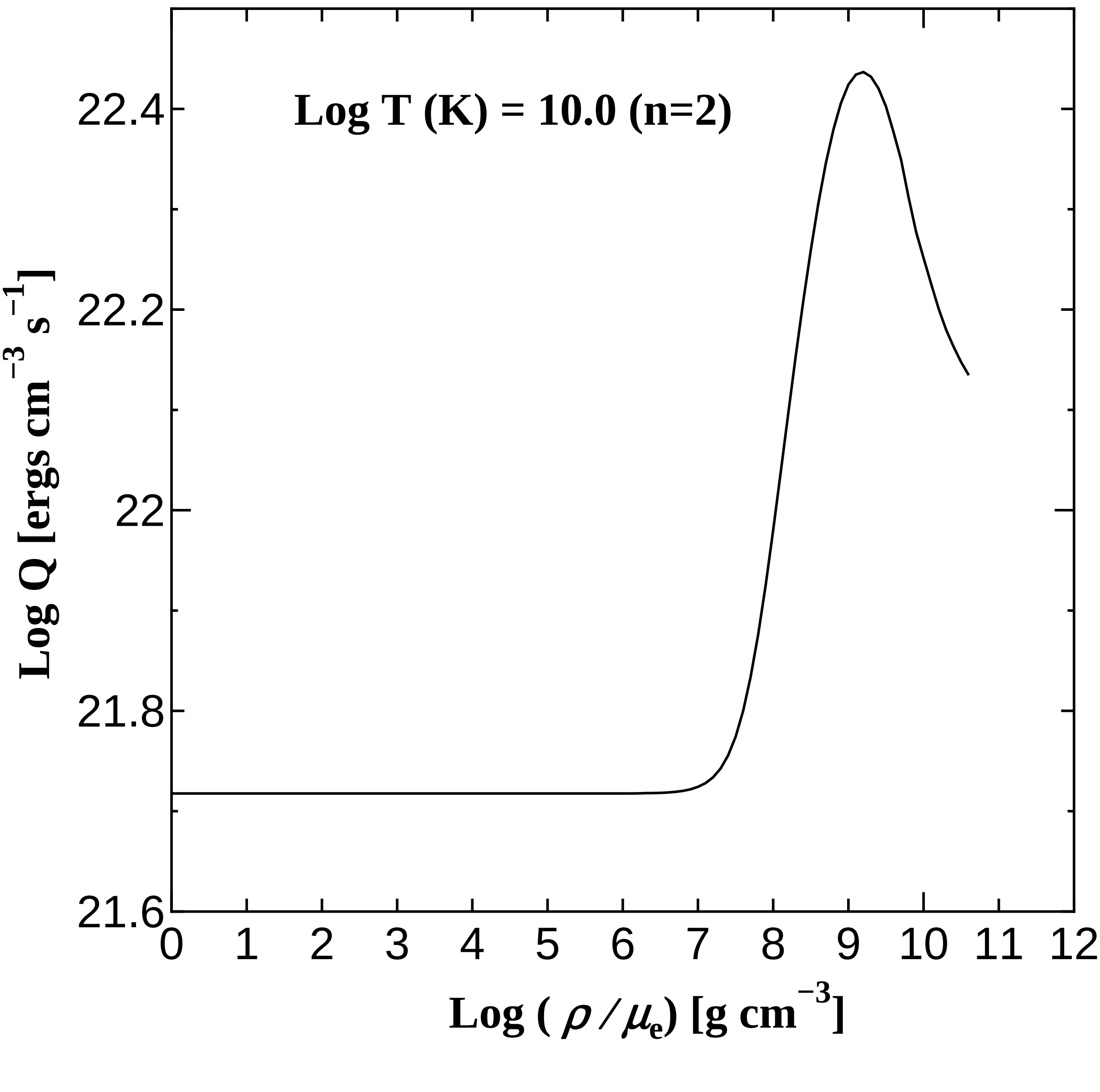

図 2.10: $T = 10^{10}\mathrm{K}$ のときのフォトニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

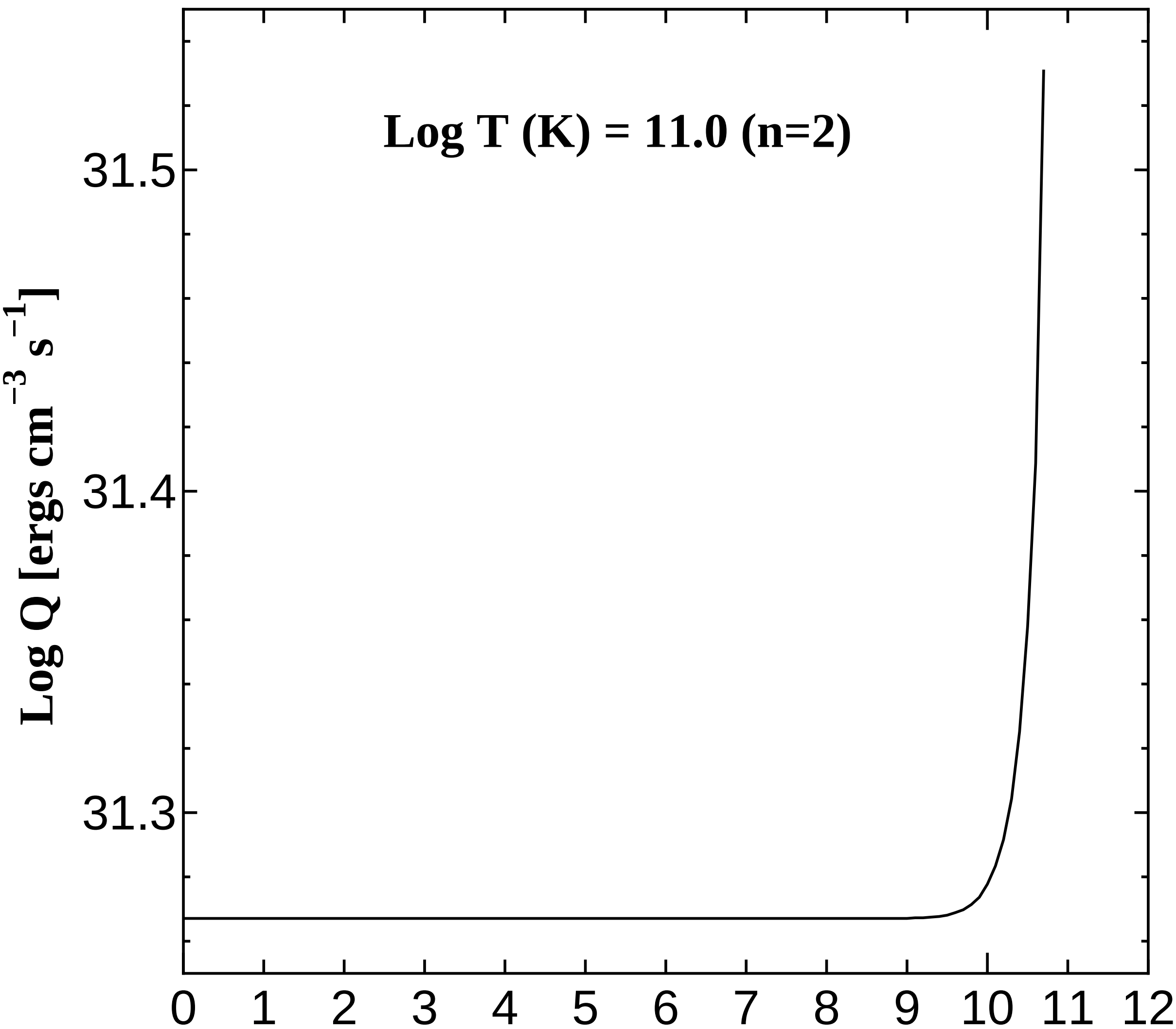

図 2.11: $T = 10^{11}$K のときのフォトニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

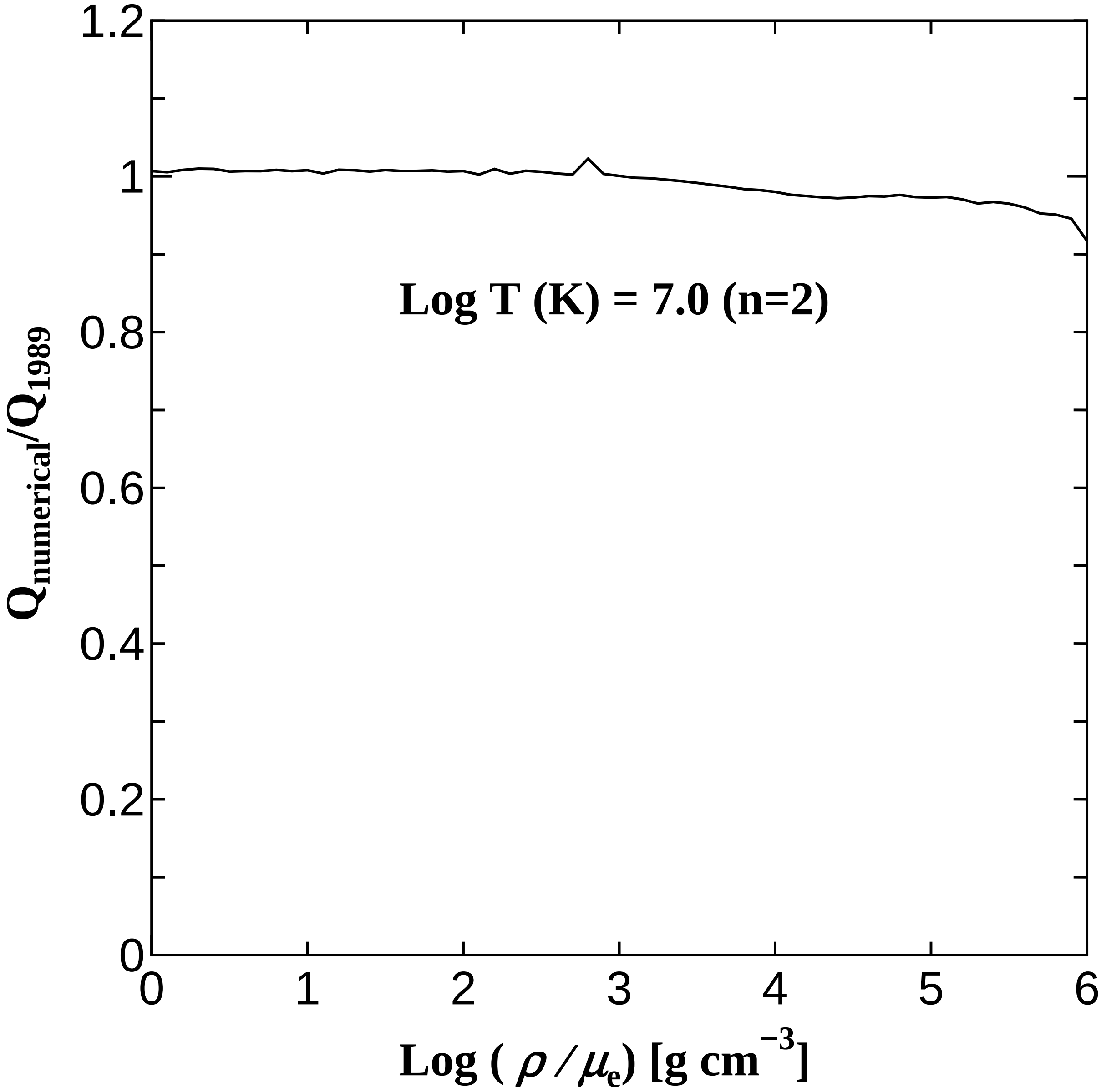

図 2.12: $T = 10^7$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

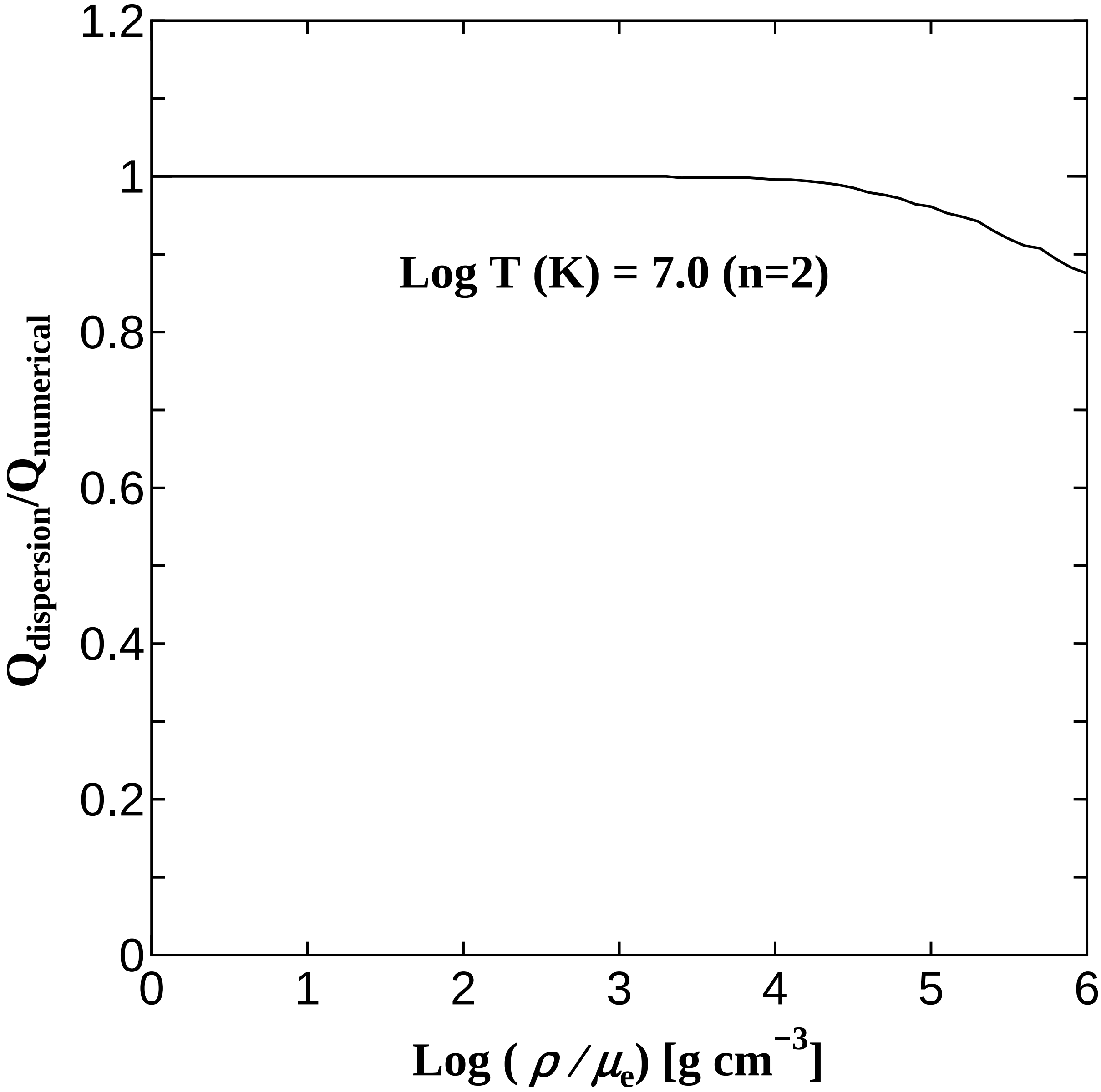

図 2.13: $T = 10^7$K のときの数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) と数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

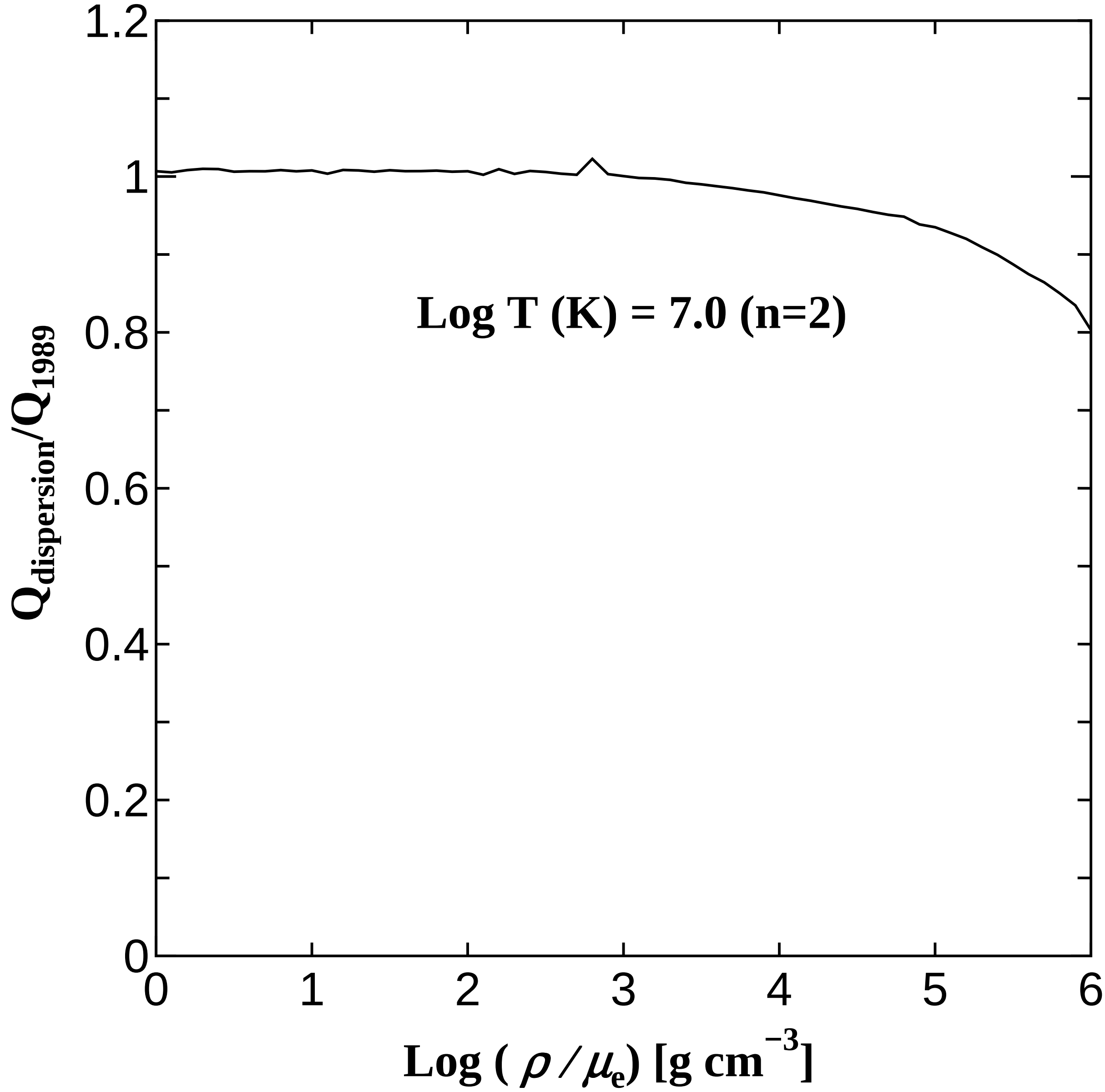

図 2.14: $T = 10^7$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

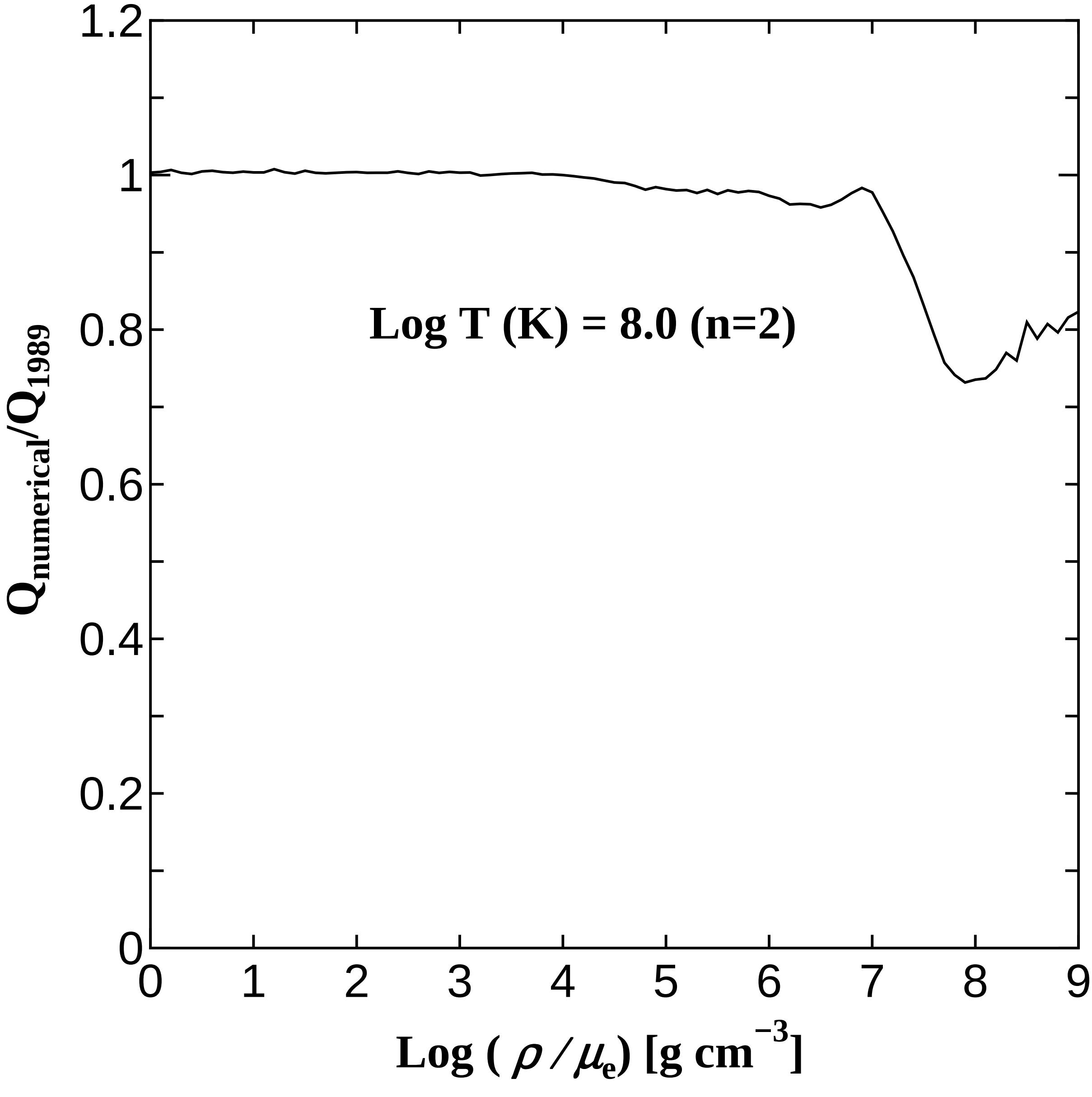

図 2.15: $T = 10^8$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

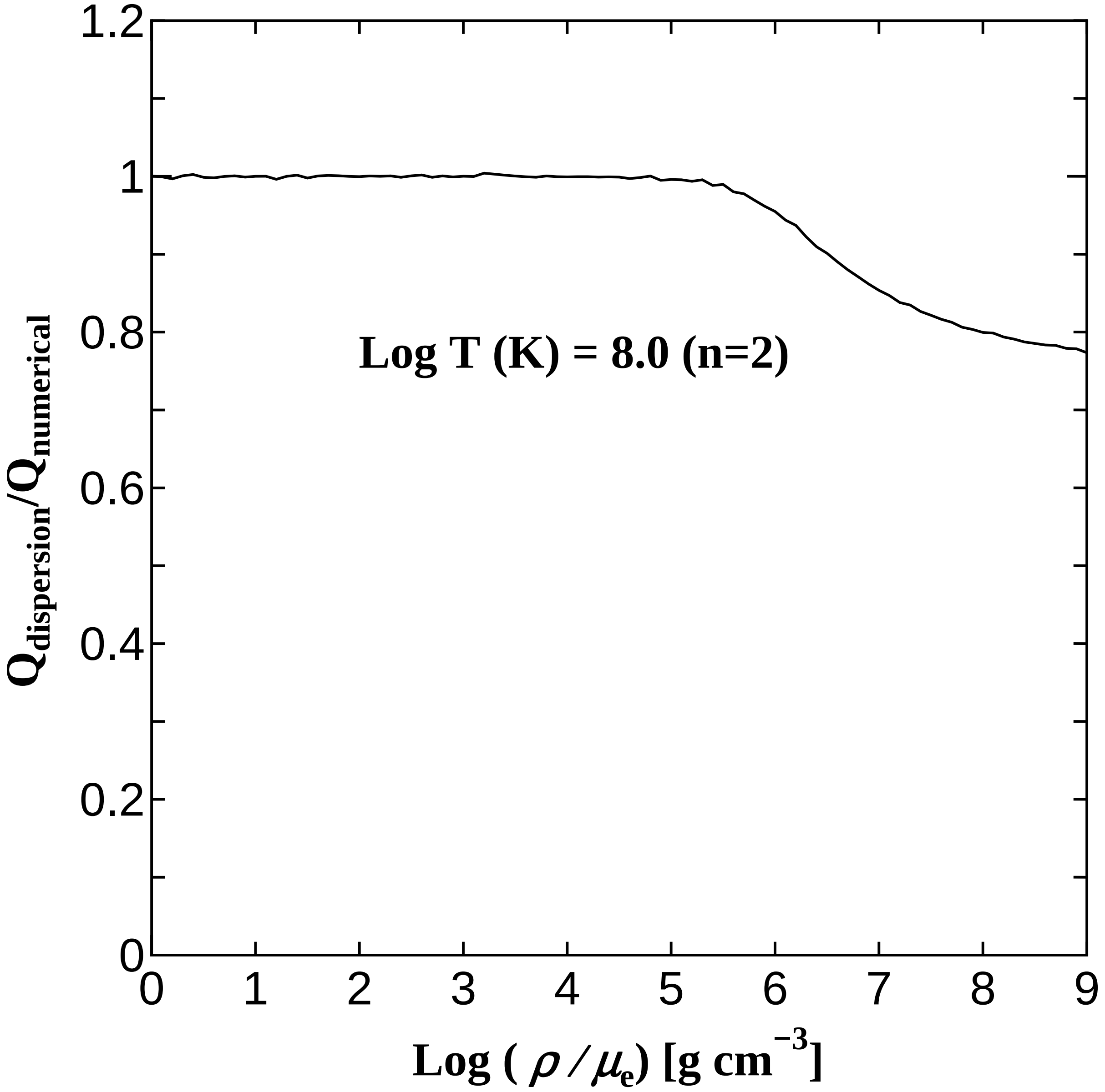

図 2.16: $T = 10^8$K のときの数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) と数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

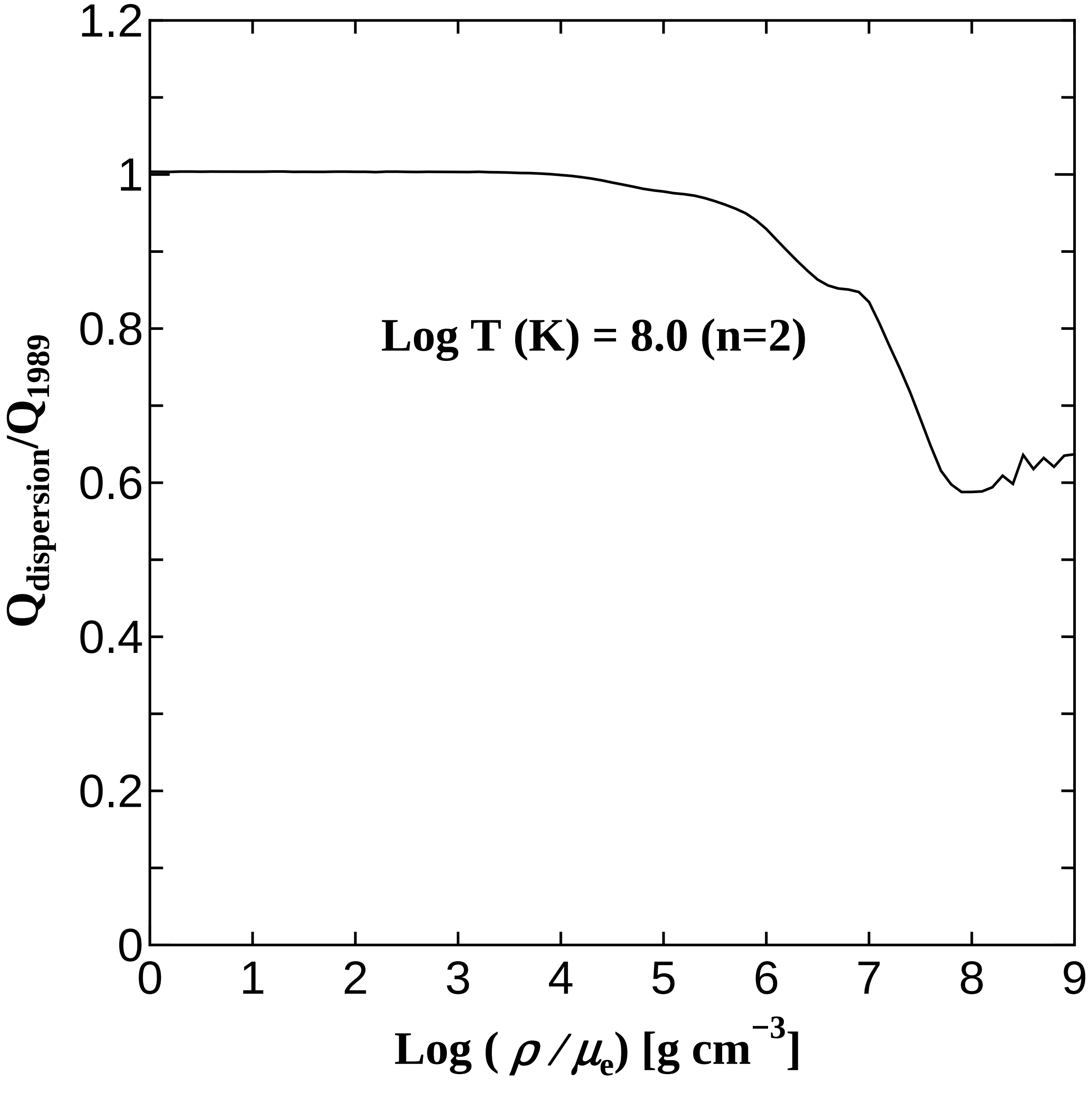

図 2.17: $T = 10^8$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

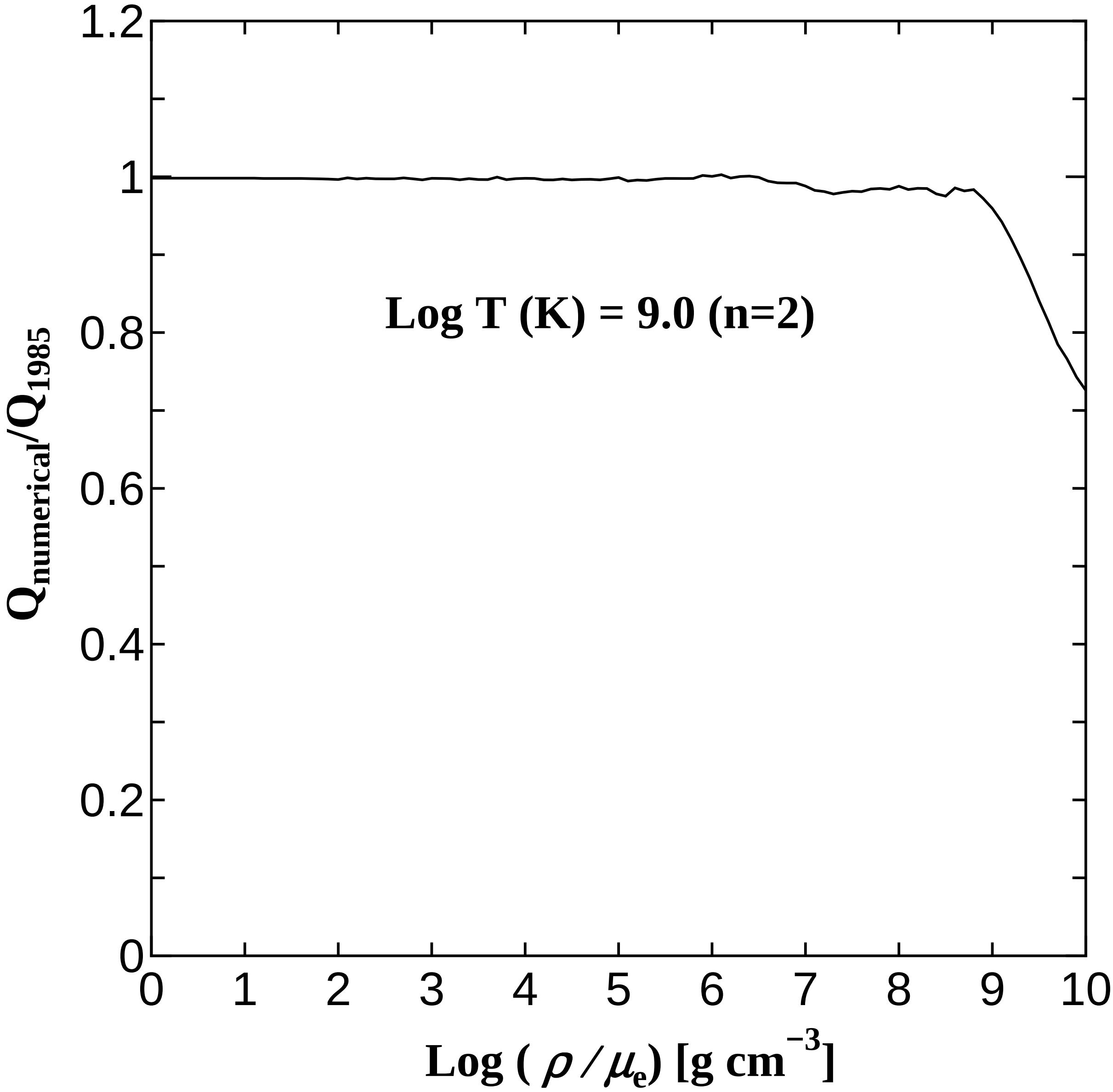

図 2.18: $T = 10^9$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

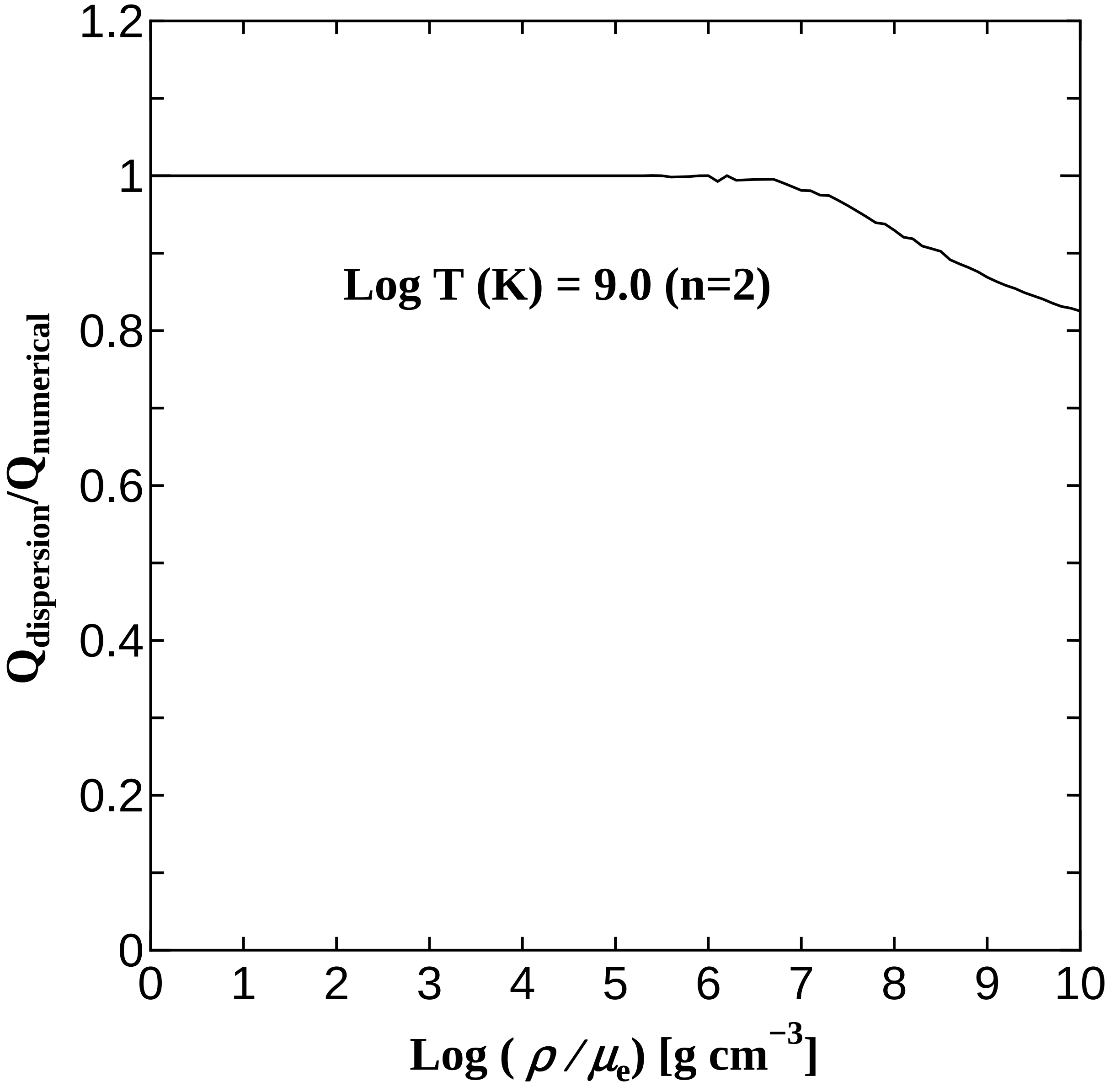

図 2.19: $T = 10^9$K のときの数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) と数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

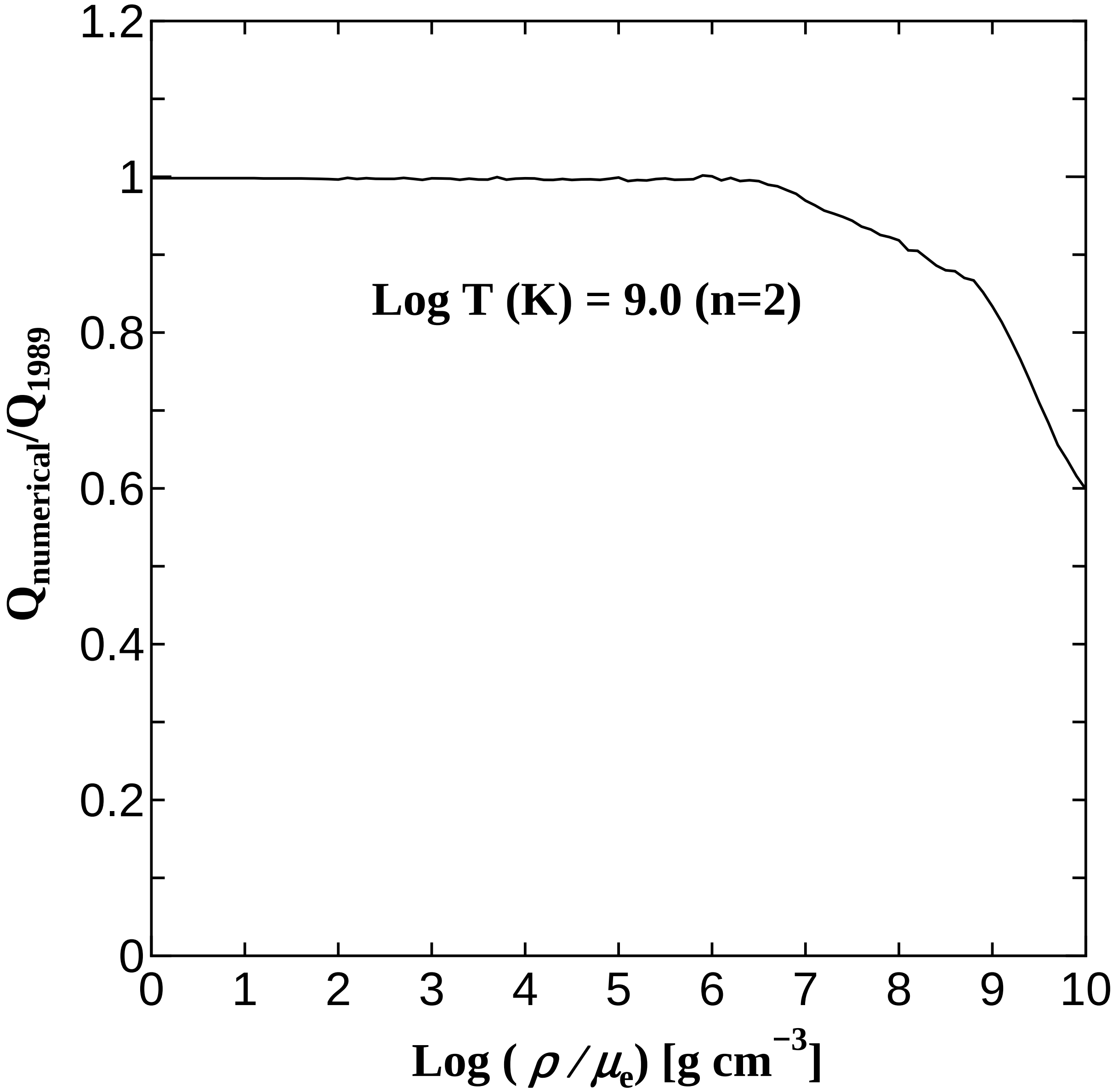

図 2.20: $T = 10^9$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

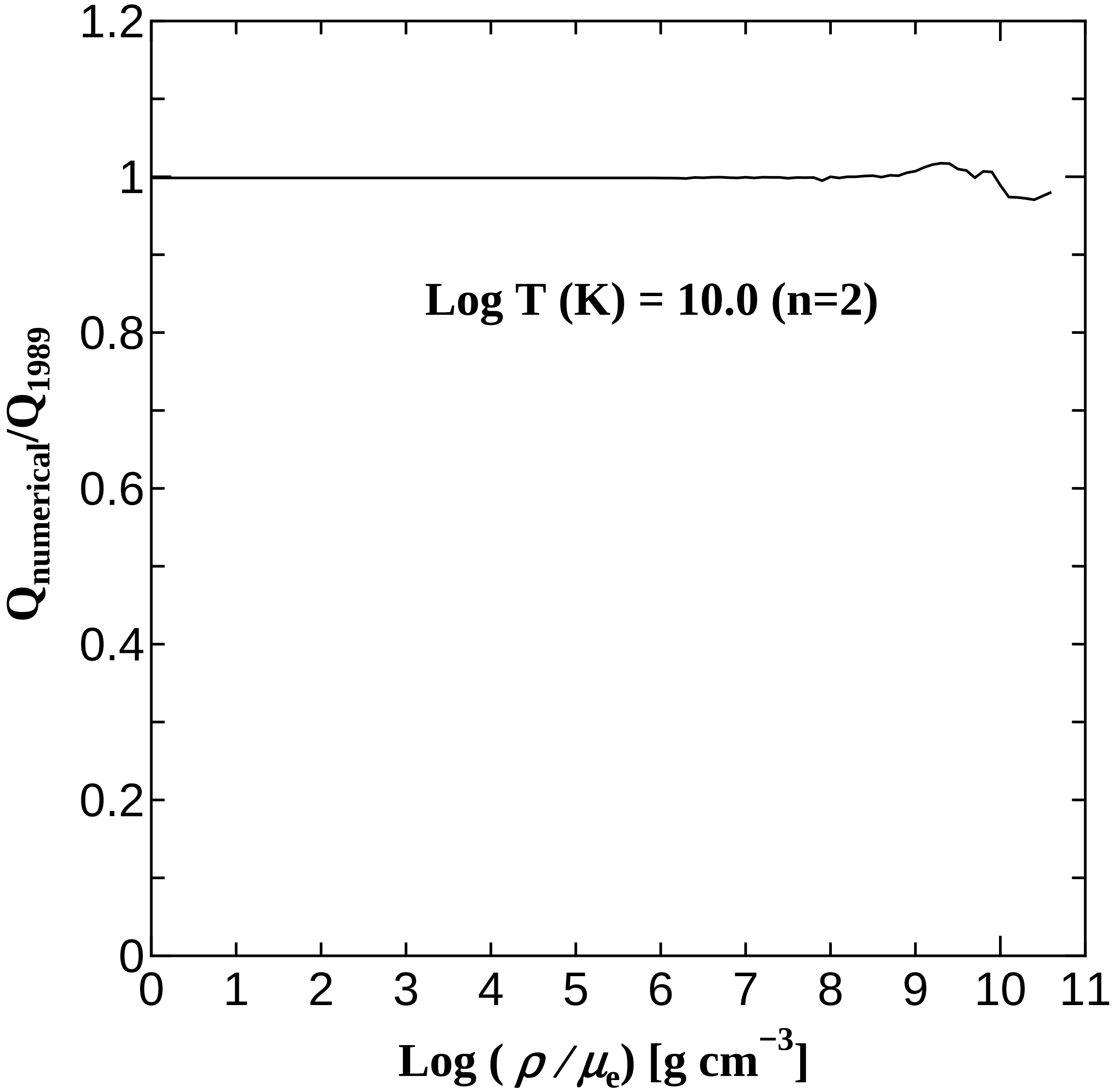

図 2.21: $T = 10^{10}$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

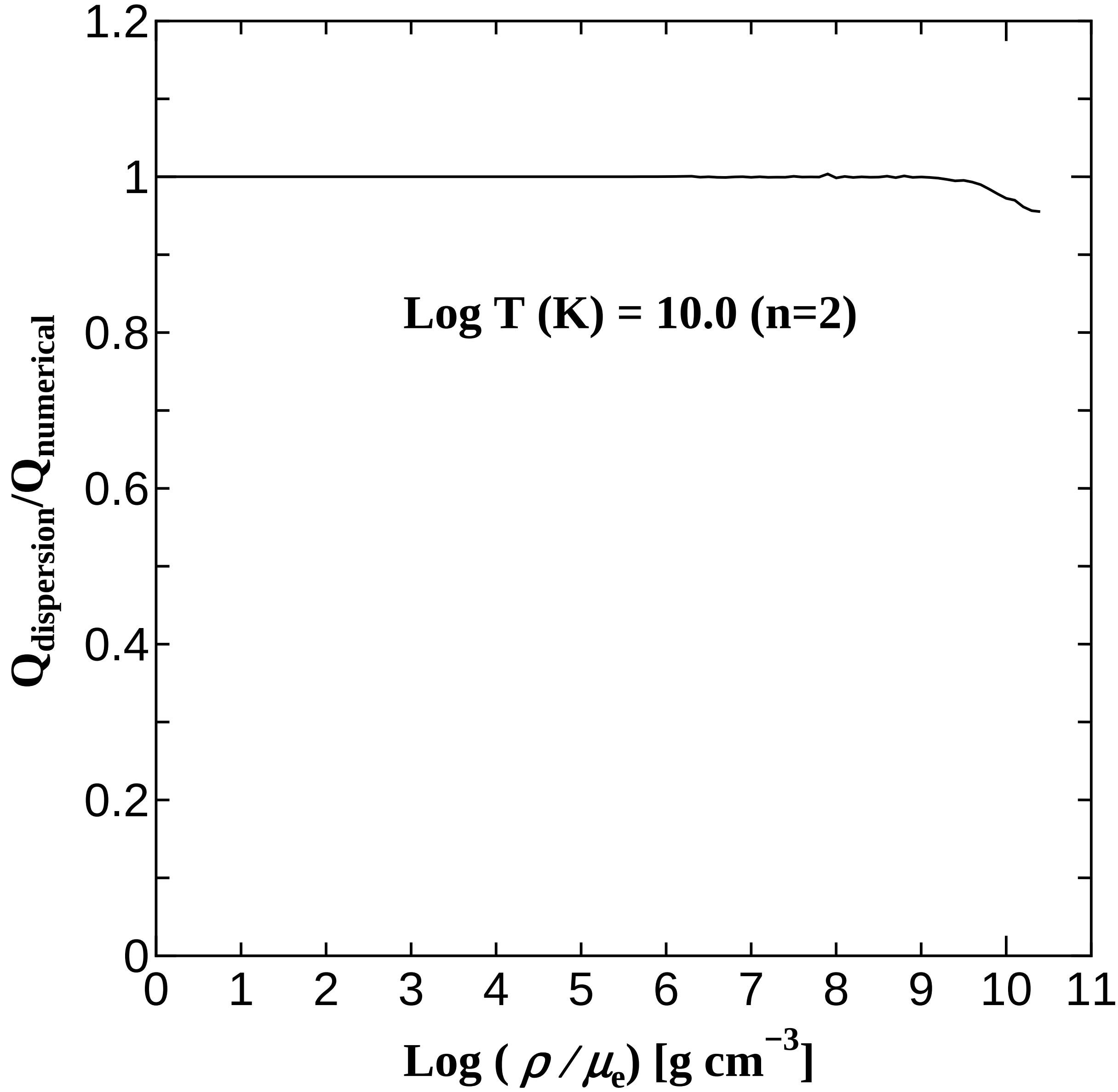

図 2.22: $T = 10^{10}$K のときの数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) と数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

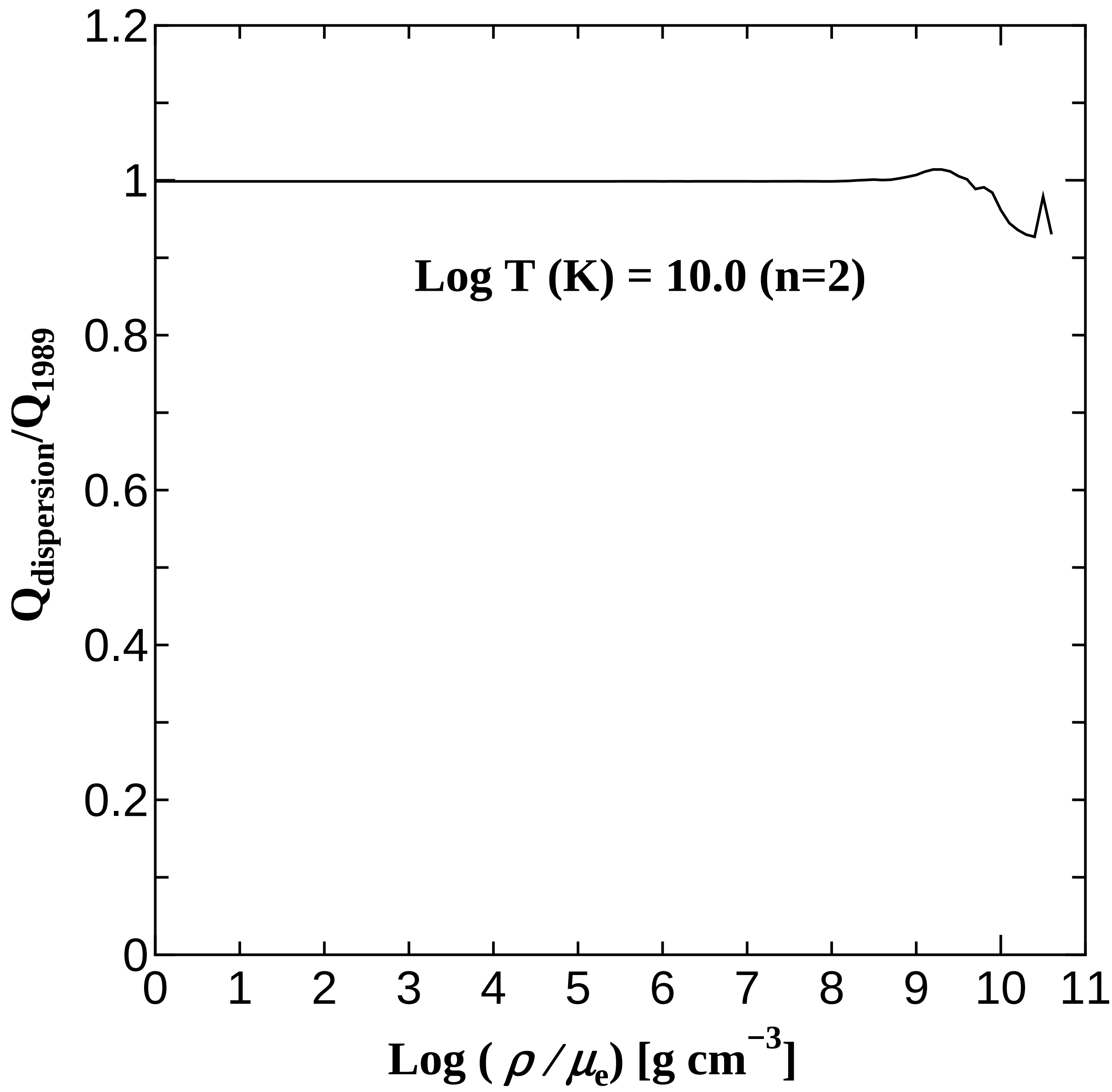

図 2.23: $T = 10^{10}$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

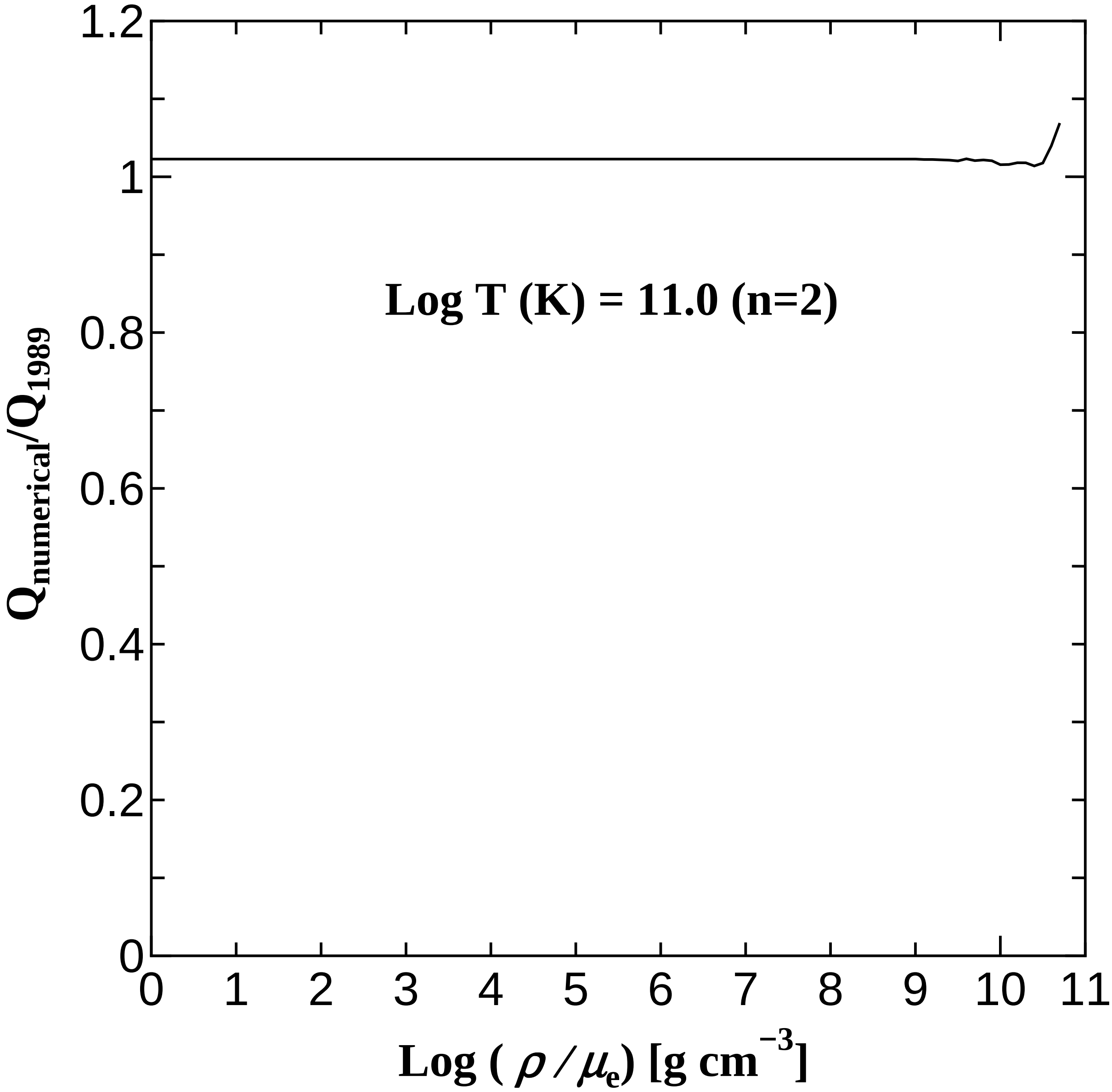

図 2.24: $T = 10^{11}$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) のフォトニュートリノ放射過程のエネルギー損失率の比較。

2.3　プラズマニュートリノ放射過程

プラズマの振動を量子化した粒子プラズモンが最終的にニュートリノ・反ニュートリノ対に崩壊する過程である。この過程は図 2.25 に示すような過程である。

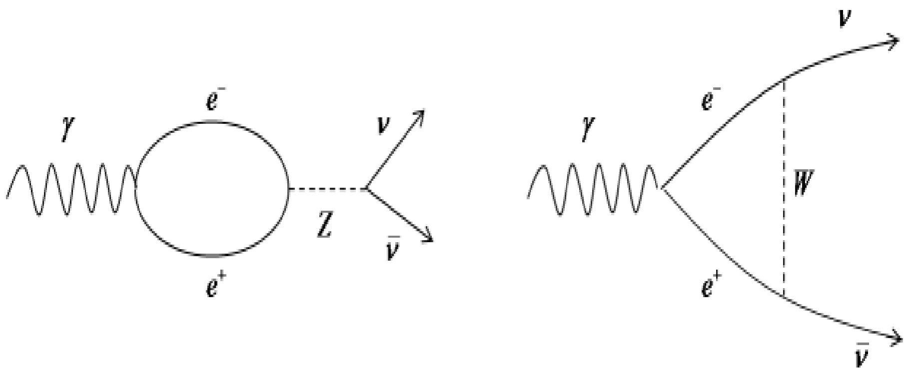

図 2.25: プラズマニュートリノ放射過程のファインマンダイアグラム。

2.3.1　数値計算

この過程による単位時間、単位体積あたりのエネルギー損失率 Q_{plasma} は、以下のように計算される。

$$Q_{plasma} = \left(C_V^2 + nC_V'^2\right) Q_V + \left(C_A^2 + nC_A'^2\right) Q_A \tag{2.53}$$

式 (2.53) で、Q_V と Q_A はベクトル流成分と軸性ベクトル流成分にそれぞれ対応している。しかし、軸性ベクトル流成分は、ベクトル流成分と比較して $T \leq 10^{11.0}$K の範囲で 0.01% 程度の寄与であることが、1986 年に Y.Kohyama、N.Itoh、H.Munakata によって示されている。よって、本論文では以下のようにプラズマニュートリノ放射過程による単位時間あたりのエネルギー損失率を計算する。

$$Q_{plasma} = \left(C_V^2 + nC_V'^2\right) Q_V \tag{2.54}$$

ベクトル流成分は以下のように記述される。

$$Q_V = Q_L + Q_T \tag{2.55}$$

$$Q_L = \frac{1}{2} A_0 \int_0^\infty dq q^2 Z_l\left(q\right) \left[\omega_l\left(q\right)^2 - q^2\right]^3 n_B\left[\omega_l\left(q\right)\right] \tag{2.56}$$

$$Q_T = A_0 \int_0^\infty dq q^2 Z_t\left(q\right) \left[\omega_t\left(q\right)^2 - q^2\right]^3 n_B\left[\omega_t\left(q\right)\right] \tag{2.57}$$

$$A_0 = \frac{g^2}{48\pi^4\alpha} mc^2 \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 = 3.001 \times 10^{21} \text{ergs cm}^{-3}\ \text{s}^{-1} \tag{2.58}$$

$$g = \frac{Gm^2 c}{\hbar^3} \tag{2.59}$$

ここで、q は電子の質量 m を基本単位としたときのプラズモンの波数であり、$\omega_l(q)$ と $\omega_t(q)$ は電子の質量 m を基本単位としたときの縦成分と横成分のプラズマ振動数である。そして、$n_B[\omega(q)]$ はボーズ分布関数である。

$$n_B[\omega(q)] = \frac{1}{\exp(\omega/k_B T) - 1} \tag{2.60}$$

$Z_l(q)$ と $Z_t(q)$ は以下のように定義される。

$$Z_l^{-1} = \left(\omega_l^2 - q^2\right) \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \omega^2} \tag{2.61}$$

$$Z_t^{-1} = \frac{\partial\left(\omega^2 \epsilon_t\right)}{\partial \omega^2} \tag{2.62}$$

ここで ϵ_l と ϵ_t は縦成分と横成分の誘電関数である。

2.3.2 解析フィッティング式

$$Q_V = \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^3 f_{plasma} \tag{2.63}$$

$$f_{plasma} = \frac{\left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4\right) e^{-c\xi}}{\xi^3 + b_1\lambda^{-1} + b_2\lambda^{-2} + b_3\lambda^{-3} + b_4\lambda^{-4}} \tag{2.64}$$

$$\xi = \left(\frac{\rho/\mu_e}{10^9 \mathrm{g\ cm^{-3}}}\right)^{1/3} \lambda^{-1} \tag{2.65}$$

$$\lambda = \frac{T}{5.930 \times 10^9 \mathrm{K}} \tag{2.66}$$

高温 $10^{8.2} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{11.0}$ のとき、フィッティング係数 a_i, b_i, c は表 2.4 となる。低温 $10^{7.0} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{8.2}$ のとき、フィッティング係数 a_i, c は以下のような関係式となる。

$$a_i = \alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i \ \ (i = 0, 1, 2, 3) \tag{2.67}$$

$$a_4 = 0 \tag{2.68}$$

$10^{8.2} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{11.0}$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
8.512E-7	-1.688E-12	3.702E-8	-3.908E-10	1.423E-11
b_1	b_2	b_3	b_4	c
2.318E-2	1.499E-2	2.259E-3	-1.555E-5	5.914E-1

表 2.4: プラズマニュートリノ放射過程フィッティング係数 ($10^{8.2} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{11.0}$)。

$$b_4 = 0 \tag{2.69}$$

$$c = c_0 + c_1 x \tag{2.70}$$

$$x = \log_{10} T(\mathrm{K}) \tag{2.71}$$

式中の $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, b_i, c_i$ は、表 2.5 となる。

$10^{7.4} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{8.2}$

i	α_i	β_i	γ_i	c_i	b_i
0......	-2.464E-8	-2.031E-6	1.755E-5	-7.508E-1	...
1......	5.270E-7	-6.683E-6	2.024E-5	-1.719E-1	6.276E-2
2......	-1.428E-7	2.041E-6	-7.215E-6	...	6.792E-2
3......	1.537E-8	-2.276E-7	8.417E-7	...	1.825E-4

$10^{7.0} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{7.4}$

i	α_i	β_i	γ_i	c_i	b_i
0......	7.115E-7	-9.159E-6	2.660E-5	-7.301E-1	...
1......	5.289E-7	-8.525E-6	3.554E-5	1.832E-1	-1.957E-3
2......	-1.445E-7	2.384E-6	-9.958E-6	...	1.259E-1
3......	1.636E-8	-2.429E-7	9.231E-7	...	2.064E-5

表 2.5: プラズマニュートリノ放射過程フィッティング係数 ($10^{7.0} \leq T(\mathrm{K}) \leq 10^{8.2}$)。

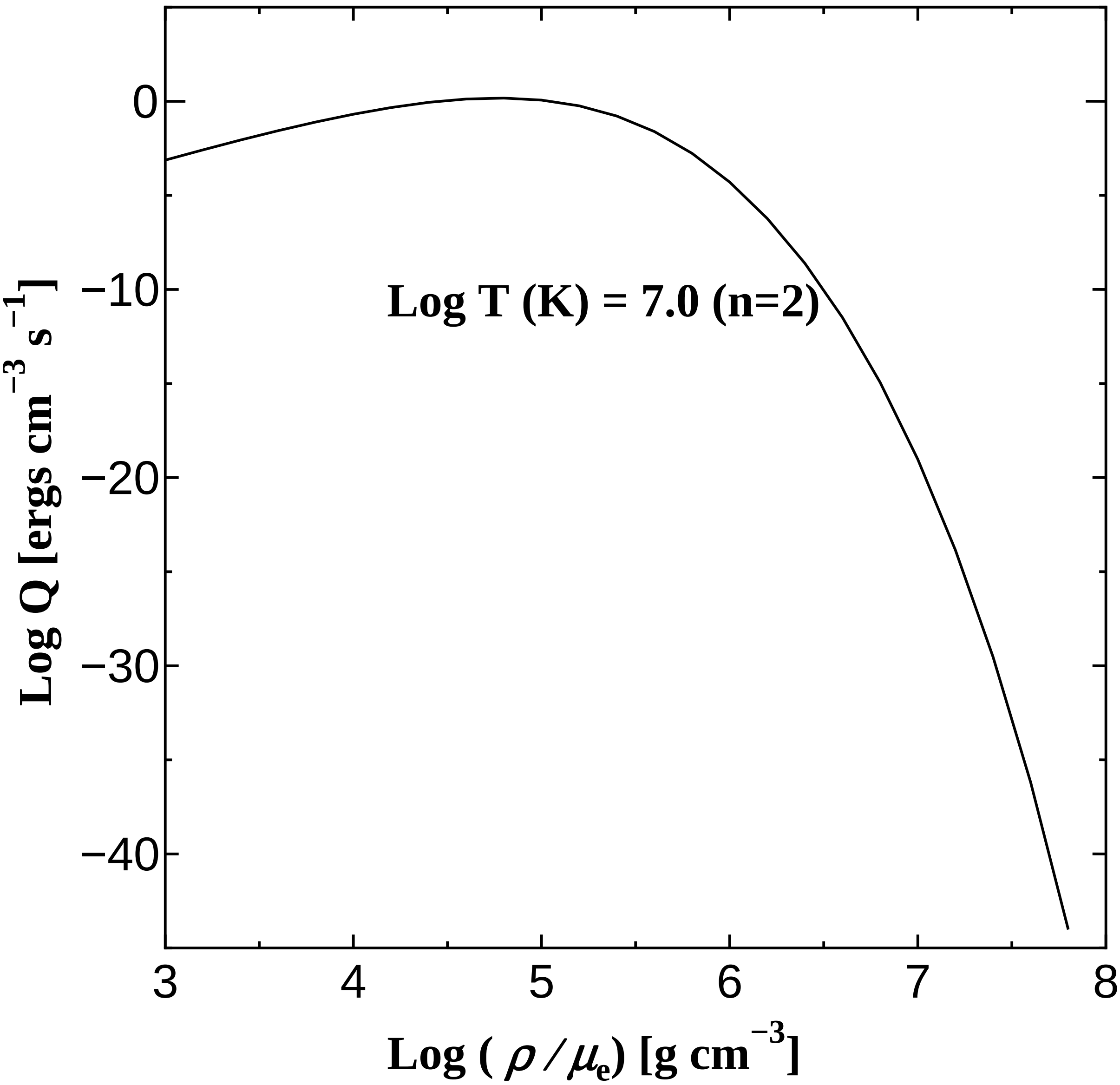

図 2.26: $T = 10^7$K のときのプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

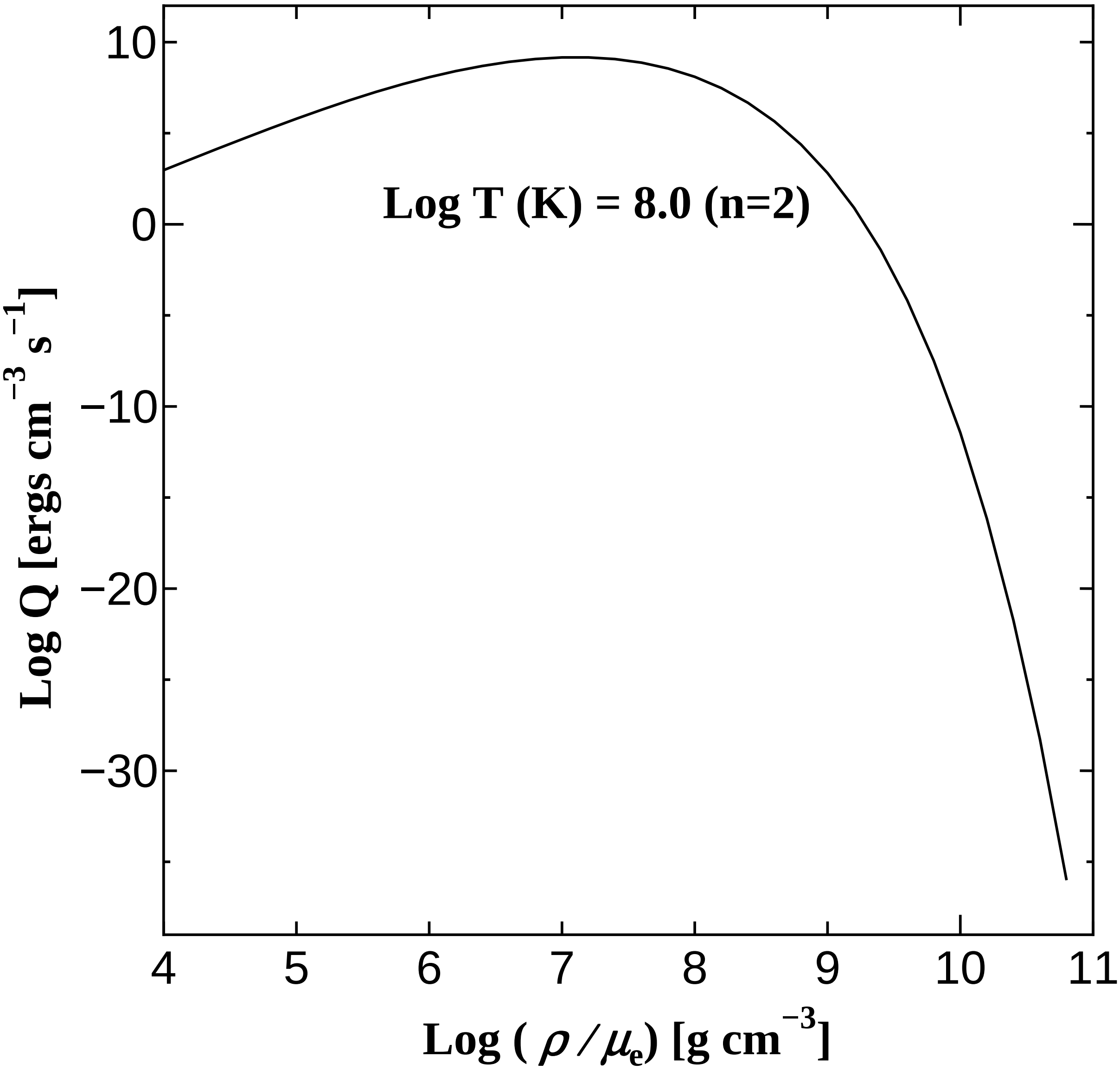

図 2.27: $T = 10^8$K のときのプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

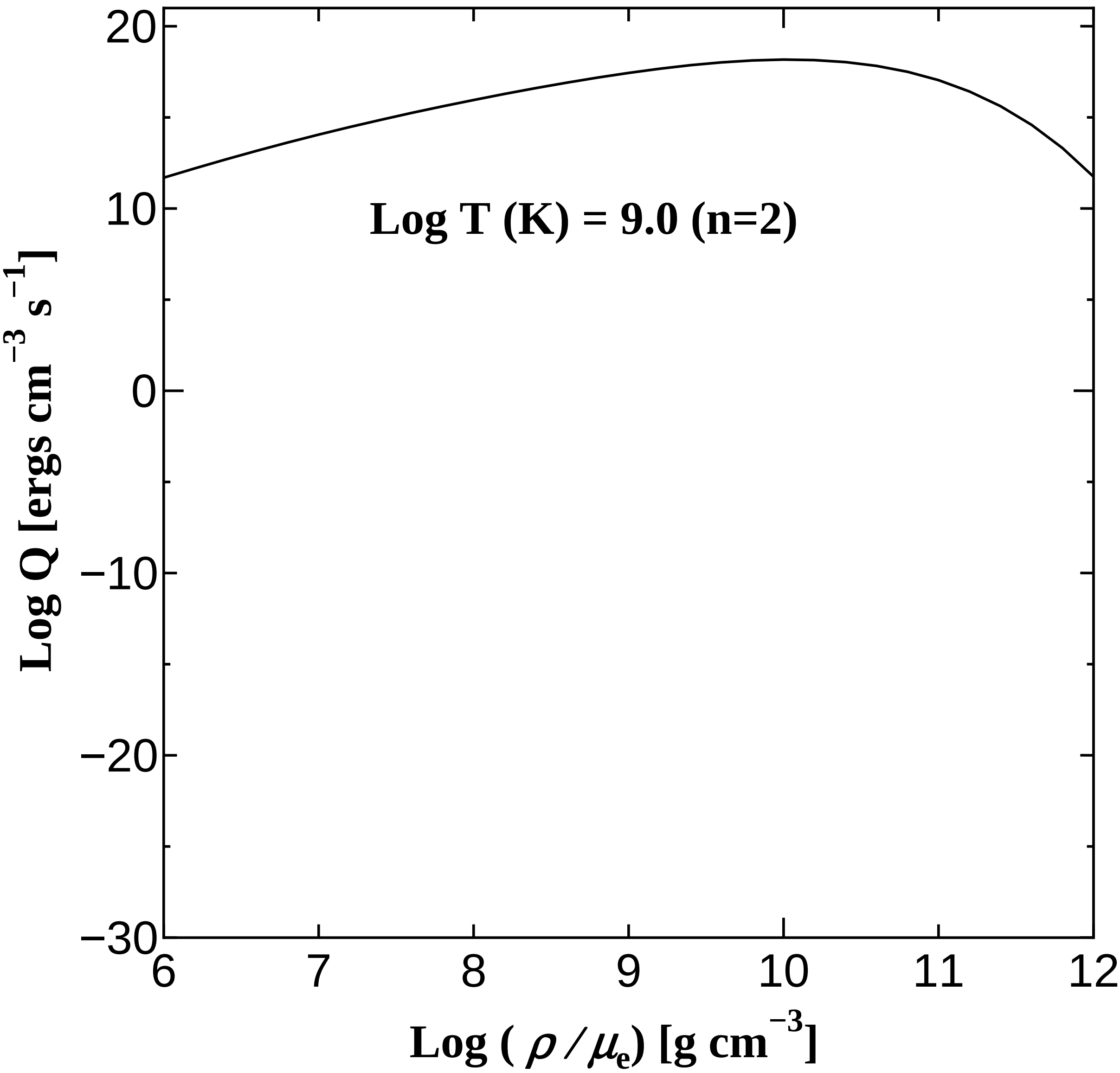

図 2.28: $T = 10^9$K のときのプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

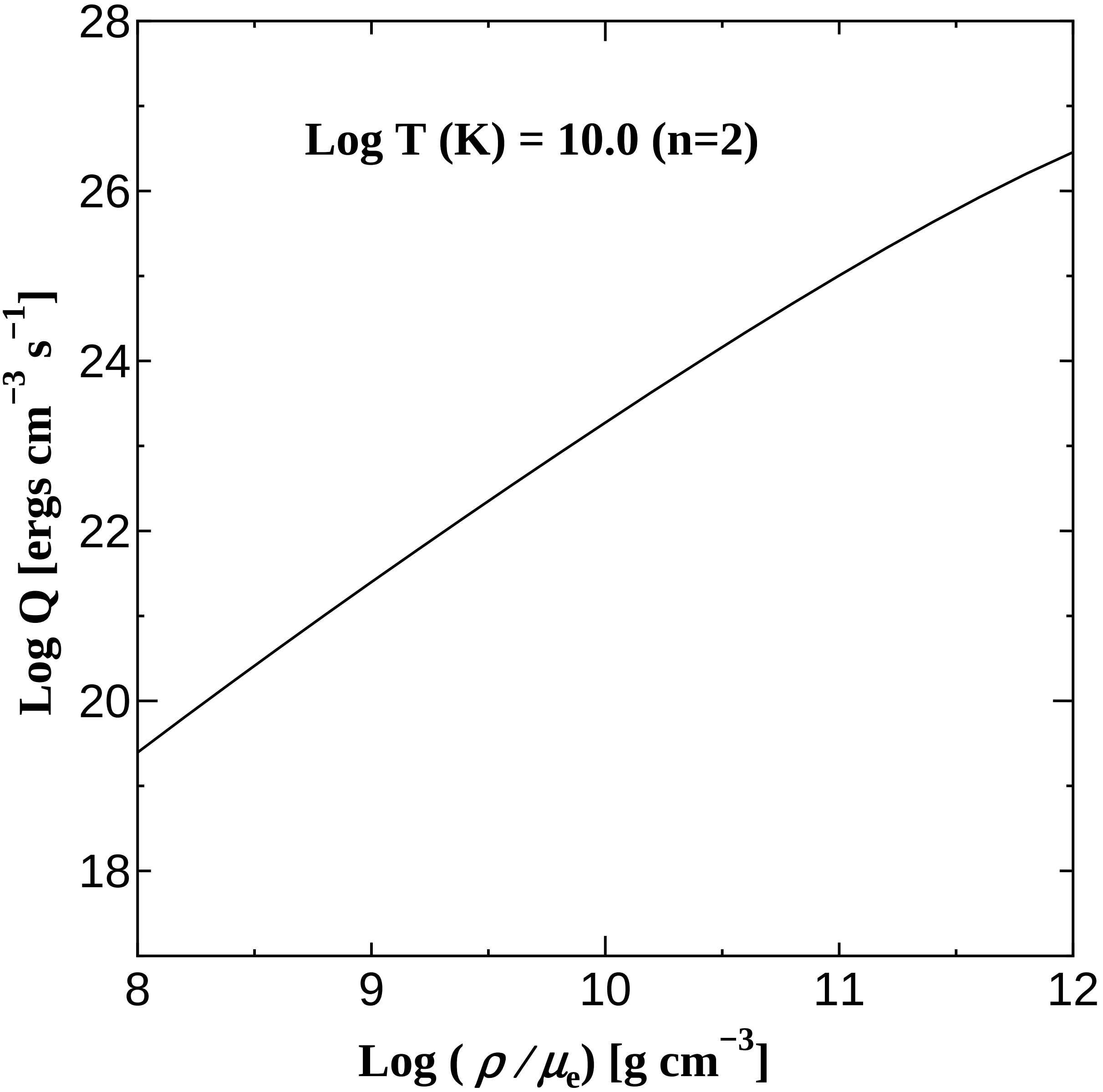

図 2.29: $T = 10^{10}$K のときのプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

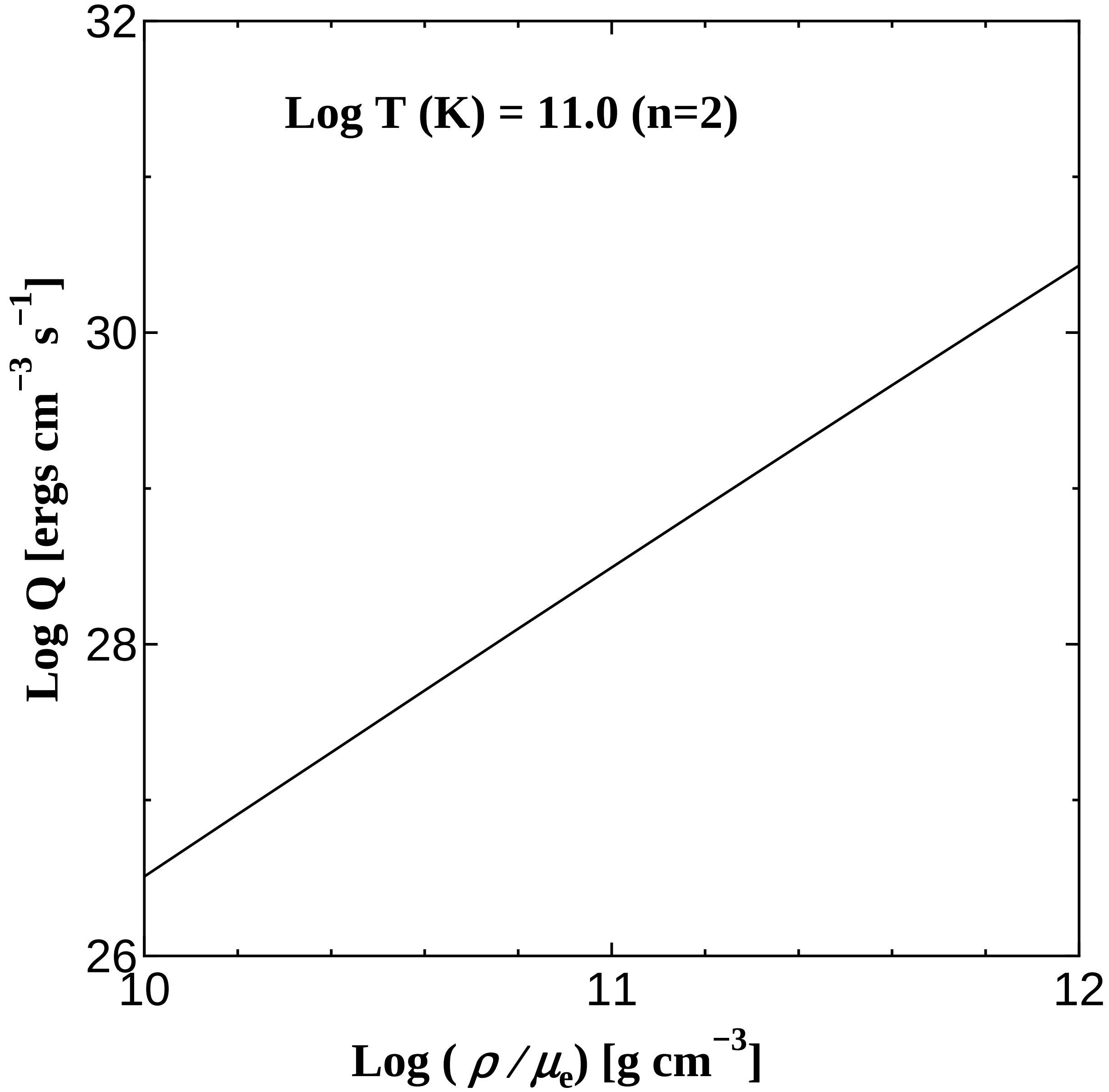

図 2.30: $T = 10^{11}$K のときのプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

2.4　ニュートリノ制動放射過程

電子がイオンの作るクーロン場によって制動を受ける際、その制動放射としてニュートリノを放射する過程である。この過程は図 2.31 に示すような過程である。

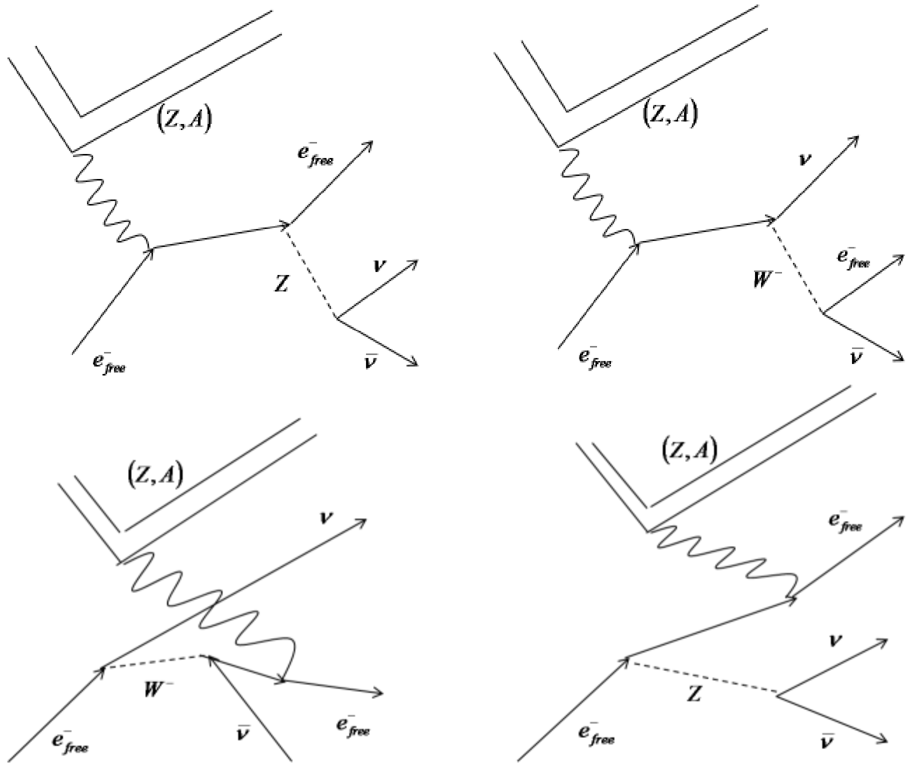

図 2.31: ニュートリノ制動放射過程のファインマンダイアグラム。

ニュートリノ制動放射過程によるエネルギー損失率の計算は、性質上計算が大変複雑となる。そのため計算は、密度・温度領域をある条件で分割し計算を行うこととする。

まず最初の条件は電子の縮退に関してである。電子の縮退は、その系の温度 T に対応するエネルギー k_BT が電子のフェルミエネルギー E_F に対してどのような関係になるかで決まる。

$$E_F = k_BT_F \tag{2.72}$$

とすると、

$$T \gg T_F \quad \text{非縮退} \tag{2.73}$$

$$T \simeq T_F \quad \text{弱く縮退} \tag{2.74}$$

$$T \ll T_F \quad \text{強く縮退} \tag{2.75}$$

本論文では弱い縮退と強い縮退の境界を以下のようにする。

$$T = 0.3T_F \tag{2.76}$$

ただし、^{4}He の場合は、$T = 0.01T_F$ とする。

次の条件は完全に縮退した電子についてのイオン状態に関してである。イオン状態を定義するパラメータ Γ を以下のように定義する。

$$\Gamma \equiv \frac{Z^2e^2}{ak_BT} = 2.275 \times 10^{-1}\frac{Z^2}{T_8}\left(\frac{\rho_6}{A}\right)^{1/3} \tag{2.77}$$

ここで、$a = (3/4\pi n_i)^{1/3}$ はイオン球半径である。そして、T_8 は、10^8K を単位とした温度であり、ρ_6 は、10^6g cm^{-3} を単位とした質量密度である。

$$\Gamma < \ 180 \quad \text{液体金属相} \tag{2.78}$$

$$\Gamma > \ 180 \quad \text{結晶格子相} \tag{2.79}$$

2.4.1 電子が弱く縮退しているときの解析フィッティング式

$$\begin{aligned} Q_{gas} =& 0.5738(\mathrm{ergs\ cm^{-3}\ s^{-1}})\left(\frac{Z^2}{A}\right)T_8^6\rho \\ &\times\left\{\frac{1}{2}\left[\left(C_V^2+C_A^2\right)+n\left(C_V'^2+C_A'^2\right)\right]F_{gas}-\frac{1}{2}\left[\left(C_V^2-C_A^2\right)+n\left(C_V'^2-C_A'^2\right)\right]G_{gas}\right\} \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$F_{gas} = \frac{1}{a_0 + a_1T_8^{-2} + a_2T_8^{-5}} + \frac{1.26\left(1+\eta^{-1}\right)}{1 + b_1\eta^{-1} + b_2\eta^{-2}} \tag{2.81}$$

$$\eta = \frac{(\rho/\mu_e)\,(\mathrm{g\ cm^{-3}})}{7.05 \times 10^6T_8^{1.5} + 5.12 \times 10^4T_8^3} \tag{2.82}$$

$$a_0 = 23.5 \tag{2.83}$$

$$a_1 = 6.83 \times 10^4 \tag{2.84}$$

$$a_2 = 7.81 \times 10^8 \tag{2.85}$$

$$b_1 = 1.47 \tag{2.86}$$

$$b_2 = 0.0329 \tag{2.87}$$

$$G_{gas} = \frac{1}{\left[1+10^{-9}\left(\rho/\mu_e\right)\right]\left(a_3 + a_4T_8^{-2} + a_5T_8^{-5}\right)} + \frac{1}{b_3\left(\rho/\mu_e\right)^{-1} + b_4 + b_5\left(\rho/\mu_e\right)^{0.656}} \tag{2.88}$$

$$a_3 = 230 \tag{2.89}$$

$$a_4 = 6.70 \times 10^5 \tag{2.90}$$

$$a_5 = 7.66 \times 10^9 \tag{2.91}$$

$$b_3 = 7.75 \times 10^5T_8^{1.5} + 247T_8^{3.85} \tag{2.92}$$

$$b_4 = 4.07 + 0.0240T_8^{1.40} \tag{2.93}$$

$$b_5 = 4.59 \times 10^{-5}T_8^{-0.110} \tag{2.94}$$

フィッティング式の適用範囲は、$10^{0.0} \le \rho/\mu_e(\mathrm{g\ cm^{-3}}) \le 10^{12.0}$、$10^{8.0} \le T(\mathrm{K}) \le 10^{11.0}$ である。

2.4.2 液体金属相のときの数値計算

まず、単位時間、単位体積あたりのエネルギー損失率は以下のように与えられる。

$$L = \int \frac{d^3 p_1}{2E_{p_1}(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{2E_{p_2}(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q_1}{2E_{q_1}(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q_2}{2E_{q_2}(2\pi)^3} Q^0 \sigma\Gamma \tag{2.95}$$

ここで、p_1 と p_2 は始めと終わりの状態の電子のエネルギー運動量 4 元ベクトルであり、q_1 と q_2 は放射されたニュートリノと反ニュートリノのエネルギー運動量 4 元ベクトルである。Q は放射されたニュートリノと反ニュートリノのエネルギー運動量 4 元ベクトルの合計量である。

$$Q = q_1 + q_2 \tag{2.96}$$

微分ニュートリノ放射率 $\sigma\Gamma$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\sigma\Gamma = &\left(\frac{e^2 GZ}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\mathrm{Tr}\gamma^\alpha (1-\gamma_5)(\gamma^\mu q_\mu)_2 \gamma^\beta (1-\gamma_5)(\gamma^\mu q_\mu)_1\right] \\
&\times \left\{\mathrm{Tr} R^0_\alpha (p_2, p_1; Q) \left[(\gamma^\mu p_\mu)_1 + m\right] R^0_\beta (p_1, p_2; -Q) \left[(\gamma^\mu p_\mu)_2 + m\right]\right\} \\
&\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} (2\pi)^4 \sigma^4 (p_1 - p_2 - Q - k) \int d^4 Q \sigma^4 (q_1 + q_2 - Q) \\
&\times n(E_{p_1}) \left[1 - n(E_{p_2})\right] \frac{1}{\left|\vec{k}^2 \epsilon\left(\vec{k}, \omega\right)\right|^2} S\left(\vec{k}, \omega\right)
\end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
R^0_\alpha (p_2, p_1; Q) \equiv &\gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) \frac{1}{(\gamma^\mu p_\mu)_2 + \gamma^\mu Q_\mu - m} \gamma^0 \\
&+ \gamma^0 \frac{1}{(\gamma^\mu p_\mu)_1 - \gamma^\mu Q_\mu - m} \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5)
\end{aligned} \tag{2.98}$$

$\epsilon(\vec{k}, \omega)$ は電子液体の誘電関数であり、$S(\vec{k}, \omega)$ はイオン系の構造因子である。ここで、ω は 4 元ベクトル k の時間成分である。

電子は強く縮退し、かつフェルミ面近くでフェルミ分布関数によって制限されていると仮定されるため、電子のトレース計算においては以下の近似式を利用する。

$$\frac{1}{(\gamma^\mu p_\mu)_2 + \gamma^\mu Q_\mu - m} \approx \frac{(\gamma^\mu p_\mu)_2 + m}{2p_2 \cdot Q} \tag{2.99}$$

$$\frac{1}{(\gamma^\mu p_\mu)_1 - \gamma^\mu Q_\mu - m} \approx -\frac{(\gamma^\mu p_\mu)_1 + m}{2p_1 \cdot Q} \tag{2.100}$$

本論文の計算においては、電子は弾性的に散乱し $\omega \to 0$ を考えている。また、構造因子、有限原子核サイズも考慮に含んでいる。単位時間、単位質量あたりのエネルギー損失率は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{L}{\rho} = &0.5738 (\mathrm{ergs\ g^{-1}\ s^{-1}}) \frac{Z^2}{A} T_8^6 \\
&\times \left\{\frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)\right] F_{liquid} - \frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 - C_A'^2\right)\right] G_{liquid}\right\}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

$$F_{liquid} = \int_0^1 dq \frac{S(q)\left|f(q)\right|^2}{q^2\left|\epsilon(q,0)\right|^2}\frac{1}{4}\frac{1}{q}\left[I_1(q)+I_2(q)+I_3(q)+I_4(q)\right] \tag{2.102}$$

$$G_{liquid} = \int_0^1 dq \frac{S(q)\left|f(q)\right|^2}{q^2\left|\epsilon(q,0)\right|^2}\frac{1}{4}\frac{1}{q}\left[J_1(q)+J_2(q)+J_3(q)+J_4(q)\right] \tag{2.103}$$

$$I_1(q) = 2\left(\beta^2-1\right)\left(\beta^2-q^2\right)\left[\frac{1}{2}\beta\left(1-\beta^2\right)\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}+\beta^2-\frac{2}{3}\right] \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned} I_2(q) =& \left[4q^2\left(1-q^2\right)-\left(\beta^2-1\right)\left(\beta^2-q^2\right)\right] \\ &\times \int_0^1 dx \frac{x\left(1-x^2\right)}{q\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}\ln\left|\frac{qx+\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}{qx-\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}\right| \end{aligned} \tag{2.105}$$

$$I_3(q) = 2q^2\left(\beta^2-1\right)\int_0^1 dx \frac{x}{q\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}\ln\left|\frac{qx+\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}{qx-\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}\right| \tag{2.106}$$

$$I_4(q) = 2q^2\left(\beta^2-1\right)\left[\frac{1}{2}\beta\left(\beta^2-1\right)\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}-\beta^2+\frac{2}{3}\right] \tag{2.107}$$

$$J_1 = 3I_1(q) \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned} J_2(q) =& -\left[4q^2+3\left(\beta^2-q^2\right)\right]\left(\beta^2-1\right) \\ &\times \int_0^1 dx \frac{x\left(1-x^2\right) right}{q\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}\ln\left|\frac{qx+\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}{qx-\left[\beta^2-\left(1-q^2\right)x^2\right]^{1/2}}\right| \end{aligned} \tag{2.109}$$

$$J_3(q) = I_3(q) \tag{2.110}$$

$$J_4(q) = I_4(q) \tag{2.111}$$

$S(q)$ はイオン液体状態を表す構造因子であり、q と Γ の多項式関数を使うことによって正確にフィットすることが可能である。このことについては、論文 [15] で述べられている。この構造因子を図 2.32 に示す。そして、$f(q)$ は原子核の広がりを考慮する有限原子核サイズであり、原子核を点と考えた場合、$|f(q)| = 1$ である。

$$f(q) = -3\frac{(2k_F r_c q)\cos(2k_F r_c q)-\sin(2k_F r_c q)}{(2k_F r_c q)^3} \tag{2.112}$$

ここで、k_F と r_c はそれぞれ電子フェルミ波数と原子核の荷電半径であり、q は $2k_F$ を単位とした運動量移動である。そして、β は以下のように定義される。

$$\beta = \frac{E_F}{\hbar k_F c} = \left[1+\frac{1}{1.018\left(\rho_6/\mu_e\right)^{2/3}}\right]^{1/2} \tag{2.113}$$

ここで、E_F は静止質量を含む電子のフェルミ準位である。1962 年に Jancovici により与えられた相対論的縮退電子の誘電関数は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\epsilon(q,0) =& 1+\left(\frac{2}{3\pi^2}\right)^{2/3}\frac{r_s}{q^2}\left[\frac{2}{3}\left(1+y^2\right)^{1/2}-\frac{2q^2y}{3}\sinh^{-1}y\right.\\
&+\left(1+y^2\right)^{1/2}\frac{y^2+1-3q^2y^2}{6qy^2}\ln\left|\frac{1+q}{1-q}\right|\\
&\left.+\frac{2q^2y^2-1}{6qy^2}\left(1+q^2y^2\right)^{1/2}\ln\left|\frac{q(1+y^2)^{1/2}+\left(1+q^2y^2\right)^{1/2}}{q\left(1+y^2\right)^{1/2}-\left(1+q^2y^2\right)^{1/2}}\right|\right]
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

$$
y=\frac{\hbar k_F}{mc}=\frac{1}{137.0}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3}r_s^{-1} \tag{2.115}
$$

$$
r_s=1.388\times10^{-2}\left(\frac{A}{\rho_6}\right)^{1/3} \tag{2.116}
$$

電子のフェルミ波数は以下のように表わされる。

$$
k_F=2.613\times10^{10}\left(\frac{\rho_6}{\mu_e}\right)^{1/3}\mathrm{cm}^{-1} \tag{2.117}
$$

高密度天体における原子核の荷電半径は、以下のようになる。

$$
r_c=\begin{cases}1.15\times10^{-13}A^{1/3}\mathrm{cm} & \rho<4.3\times10^{11}\mathrm{g\ cm}^{-3}\ \text{のとき}\\ 1.83\times10^{-13}Z^{1/3}\mathrm{cm} & \rho>4.3\times10^{11}\mathrm{g\ cm}^{-3}\ \text{のとき}\end{cases} \tag{2.118}
$$

^{4}He,^{12}C,^{56}Fe の 3 つのイオンの場合において、計算の結果を図に示す。その際、$\Gamma=0,|f(q)=1|$ の場合での比較も合わせて行う。

2.4.3 液体金属相のときの解析フィッティング式

以下のように変数を定義する。

$$
u=2\pi\left(\log_{10}\rho\right)/25.6 \tag{2.119}
$$

この解析フィッティング式は、フーリエ級数フィッティング式と多項式フィッティング式を使う。適用範囲は、$10^{0.0}\le\rho\le10^{12.8}\left(\mathrm{g\ cm}^{-3}\right)$、$0.1\le\Gamma\le180$ である。結果として平均 5% の誤差で解析式を導くことが可能となる。以下に解析フィッティング式を示す。

$$
\begin{aligned}
Q_{liquid} =& 0.5738(\mathrm{ergs\ cm}^{-3}\ \mathrm{s}^{-1})T_8^6\rho\\
&\times\left\{\frac{1}{2}\left[\left(C_V^2+C_A^2\right)+n\left(C_V'^2+C_A'^2\right)\right]F_{liquid}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\left[\left(C_V^2-C_A^2\right)+n\left(C_V'^2-C_A'^2\right)\right]G_{liquid}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

$$
F_{liquid}(u,\Gamma)=vF_{liquid}(u,0.1)+(1-v)F_{liquid}(u,180) \tag{2.121}
$$

	^{4}He	^{12}C	^{56}Fe
a_1......	0.1843	0.2210	0.2926
a_2......	-0.0644	-0.0980	-0.1513
a_3......	0.0025	0.0078	0.0249
a_4......	0.0089	0.0088	0.0031
a_5......	-0.0039	-0.0021	0.0033
a_6......	-0.0093	-0.0127	-0.0184
a_7......	0.0031	0.0051	0.0091
a_8......	0.0003	-0.0004	-0.0022
a_9......	-0.0005	0.0001	0.0013
a_{10}......	-0.0014	-0.0021	-0.0032
b......	0.0482	0.0543	0.0557
c......	0.1234	0.1259	0.1253
d_1......	0.0406	0.1116	0.2485
d_2......	0.0373	0.0182	-0.0322
d_3......	0.0053	0.0143	0.0326
d_4......	-0.0092	-0.0074	-0.0144
d_5......	0.0022	0.0056	0.0085
d_6......	0.0032	-0.002	-0.0122
d_7......	0.0005	0.0014	0.0049
d_8......	-0.0013	-0.0018	-0.0036
d_9......	0.0006	0.0012	0.0021
d_{10}......	0.0004	-0.0008	-0.0026
e......	-0.0053	0.0027	0.013
f......	0.1109	0.1148	0.1281

表 2.6: ニュートリノ制動放射過程 (液体金属相のとき) フィッティング係数 $F_{liquid}(u,0.1), F_{liquid}(u,180)$。

$$G_{liquid}(u,\Gamma) = wG_{liquid}(u,0.1) + (1-w)G_{liquid}(u,180) \tag{2.122}$$

$$F_{liquid}(u,0.1) = \sum_{m=1}^{10} a_m \sin mu + \frac{12.8}{\pi} bu + c \tag{2.123}$$

$$F_{liquid}(u,180) = \sum_{m=1}^{10} d_m \sin mu + \frac{12.8}{\pi} eu + f \tag{2.124}$$

$$G_{liquid}(u,0.1) = \sum_{m=1}^{10} g_m \sin mu + \frac{12.8}{\pi} hu + i \tag{2.125}$$

$$G_{liquid}(u,180) = \sum_{m=1}^{10} j_m \sin mu + \frac{12.8}{\pi} ku + l \tag{2.126}$$

	^{4}He	^{12}C	^{56}Fe
g_1......	0.0738	0.0833	0.0929
g_2......	-0.0193	-0.0190	0.0173
g_3......	-0.0259	-0.0304	-0.0349
g_4......	0.0024	0.0037	0.0059
g_5......	0.0089	0.0102	0.0111
g_6......	-0.0048	-0.0058	-0.0072
g_7......	-0.0028	-0.0031	-0.003
g_8......	0.0022	0.0027	0.0032
g_9......	0.0004	0.0004	0.0002
g_{10}......	-0.0011	-0.0013	-0.0014
h......	-0.0019	-0.0019	-0.0019
i......	0.0239	0.0244	0.0243
j_1......	0.0077	0.0238	0.0512
j_2......	0.0112	0.0165	0.0231
j_3......	0.0003	-0.0043	-0.0135
j_4......	-0.0023	-0.0019	-0.0009
j_5......	0.0004	0.0029	0.0058
j_6......	0.0009	0.0001	-0.0023
j_7......	-0.0001	-0.0012	-0.0024
j_8......	-0.0003	0.0001	0.0011
j_9......	0.0000	0.0003	0.0004
j_{10}......	0.0001	-0.0002	-0.0007
k......	-0.0017	-0.0017	-0.0019
l......	0.0215	0.0222	0.0248

表 2.7: ニュートリノ制動放射過程 (液体金属相のとき) フィッティング係数 $G_{liquid}(u, 0.1)$,$G_{liquid}(u, 180)$。

$$v = \sum_{m=0}^{3} \alpha_m x^m \tag{2.127}$$

$$w = \sum_{m=0}^{3} \beta_m x^m \tag{2.128}$$

$$x = 0.61439 \log_{10} \Gamma - 0.38561 \tag{2.129}$$

フィッティング係数を表 2.6、表 2.7、そして表 2.8 に示す。

	^{4}He	^{12}C	^{56}Fe
α_0......	0.2107	0.2408	0.1973
α_1......	-0.5256	-0.5375	-0.6582
α_2......	0.2990	0.2686	0.3027
α_3......	0.0266	0.0366	0.1542
β_0......	0.2193	0.2402	0.2009
β_1......	-0.5188	-0.5395	-0.6559
β_2......	0.2899	0.2692	0.2995
β_3......	0.0194	0.0386	0.1521

表 2.8: ニュートリノ制動放射過程 (液体金属相のとき) フィッティング係数 v, w。

2.4.4 イオン混合のとき

恒星内部は単一イオンのみで構成されている場合だけではない。ここでは液体金属相の場合で扱うイオンの混合について考える。

2 種のイオンの混合について、混合されるイオンの原子番号、質量数をそれぞれ (Z_1, A_1)、(Z_2, A_2) とする。質量によるイオンの割合は、X_1、X_2、ただし $X_1 + X_2 = 1$ である。式 (2.120) は以下のように書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
Q_{liquid} =& 0.5738(\mathrm{ergs\ cm^{-3}\ s^{-1}}) T_8^6 \rho \\
& \times \left[X_1 \frac{Z_1^2}{A_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right) \right] F_{liquid}(\Gamma_1) \right.\right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left[\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 - C_A'^2\right) \right] G_{liquid}(\Gamma_1) \right\} \\
& + \left[X_2 \frac{Z_2^2}{A_2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right) \right] F_{liquid}(\Gamma_2) \right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{1}{2} \left[\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 - C_A'^2\right) \right] G_{liquid}(\Gamma_2) \right\} \right]
\end{aligned}
\tag{2.130}
$$

$$
\Gamma_i = 2.275 \times 10^{-1} \frac{Z_i^2}{T_8} \left(\frac{\rho_6 X_i}{A_i} \right)^{1/3} \quad (i = 1, 2) \tag{2.131}
$$

この計算を同様にして多種イオンについても拡張することが可能である。

2.4.5 結晶格子相のときの解析フィッティング式

結晶格子相のときは液体金属相のときとほぼ同様である。最大の違いは、結晶格子相のときはエネルギー損失率に寄与する成分として $static\, lattice$ によるもの ($Q_{lattice}$) と $phonon$ によるもの (Q_{phonon}) があるということである。エネルギー損失率はこれらの和である。解析フィッティング式の適用範囲は、$10^4 \leq \rho 10^{12}$[g cm^{-3}]、$171 \leq \Gamma \leq 5000$ である。Γ に関して、液体金属相と結晶格子相の境界に多少の違いがある。これは、この解析的フィッティング式が作成された当時 (参考文献 [4]、[6])、$\Gamma = 171$ であったため、解析フィッティング式

	^{4}He	^{12}C	^{56}Fe
a_0......	-0.02296	0.03677	0.04192
a_1......	0.01601	-0.01066	-0.01768
a_2......	-0.00433	-0.00458	-0.00007
a_3......	0.00015	-0.00177	-0.00241
a_4......	-0.00034	-0.00138	-0.00080
b_1......	0.01558	-0.00244	-0.01705
b_2......	0.00191	-0.00206	-0.00268
b_3......	-0.00055	-0.00037	-0.00141
c......	-0.01694	-0.01093	0.00818
d......	0.10649	0.12431	0.13629
e_0......	-0.03654	0.04719	0.09256
e_1......	0.02395	-0.01353	-0.03290
e_2......	-0.00448	-0.00619	-0.00523
e_3......	-0.00033	-0.00211	-0.00539
e_4......	-0.00088	-0.00176	-0.00276
f_1......	0.01730	0.00456	-0.02574
f_2......	0.00402	-0.00174	-0.00630
f_3......	-0.00005	-0.00031	-0.00285
g......	-0.02222	-0.02259	0.00022
h......	0.13969	0.20343	0.31871

表 2.9: ニュートリノ制動放射過程 (結晶格子相のとき) フィッティング係数 $F_{latice}(u, 171), F_{lattice}(u, 5000)$。

も $171 \leq \Gamma \leq 5000$ で作成されたためである。ただし、本論文では Γ の下限を $\Gamma = 180$ としているため問題はない。以下にフィッティング式を示す。

$$Q_{crystal} = Q_{lattice} + Q_{phonon} \tag{2.132}$$

$$u = 2\pi(\log_{10}\rho - 3)/9 \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned} Q_{lattice} =& 0.5738(\mathrm{ergs\ cm^{-3}\ s^{-1}}) \left(\frac{Z^2}{A}\right) T_8^6 \rho f_{band} \\ &\times \left\{\frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + C_A'^2\right)\right] F_{lattice} - \frac{1}{2}\left[\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 - C_A'^2\right)\right] G_{lattice}\right\} \end{aligned} \tag{2.134}$$

$$f_{band} = \exp\left(\frac{-2V_{band}}{k_B T}\right) \tag{2.135}$$

$$\begin{aligned} \frac{2V_{band}}{k_B T} &= \frac{0.00119 Z^{2/3} \hbar k_F c}{k_B T} \\ &= 7.12 \times 10^{-2} Z \left(\frac{\rho_6}{A}\right)^{1/3} T_8^{-1} \end{aligned} \tag{2.136}$$

	^{4}He	^{12}C	^{56}Fe
i_0......	-0.00647	0.00106	0.00977
i_1......	0.00440	-0.00048	-0.00653
i_2......	-0.00110	-0.00022	0.00171
i_3......	0.00001	0.00019	-0.00024
i_4......	-0.00007	-0.00001	0.00017
j_1......	0.00294	0.00658	0.00869
j_2......	0.00059	-0.00180	-0.00323
j_3......	-0.00018	0.00036	0.00075
k......	-0.00337	-0.00398	-0.00439
l......	0.02116	0.02499	0.02766
p_0......	-0.00938	-0.00047	0.01464
p_1......	0.00610	0.00063	-0.00957
p_2......	-0.00114	-0.00064	0.00222
p_3......	-0.00010	0.00030	-0.00022
p_4......	-0.00018	-0.00006	0.00025
q_1......	0.00320	0.01013	0.01867
q_2......	0.00107	-0.00247	-0.00615
q_3......	-0.00008	0.00052	0.00133
r......	-0.00442	-0.00650	-0.01023
s......	0.02775	0.04087	0.06442

表 2.10: ニュートリノ制動放射過程 (結晶格子相のとき) フィッティング係数 $G_{latice}(u, 171), G_{lattice}(u, 5000)$。

$$
\begin{aligned}
Q_{phonon} =& 0.5738(\mathrm{ergs\ cm^{-3}\ s^{-1}}) \left(\frac{Z^2}{A}\right) T_8^6 \rho f \\
& \times \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(C_V^2 + C_A^2\right) + n \left(C_V'^2 + C_A'^2\right) \right] F_{phonon} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left[\left(C_V^2 - C_A^2\right) + n \left(C_V'^2 - C_A'^2\right) \right] G_{phonon} \right\}
\end{aligned} \tag{2.137}
$$

$$
F_{lattice}(u, \Gamma) = (1 - v) F_{lattice}(u, 171) + v F_{lattice}(u, 5000) \tag{2.138}
$$

$$
G_{lattice}(u, \Gamma) = (1 - w) G_{lattice}(u, 171) + w G_{lattice}(u, 5000) \tag{2.139}
$$

$$
F_{phonon} = v' F'_{phonon}(u, 171) \tag{2.140}
$$

$$
G_{phonon} = w' G'_{phonon}(u, 171) \tag{2.141}
$$

$$
F_{lattice}(u, 171) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{4} a_m \cos mu + \sum_{m=1}^{3} b_m \sin mu + cu + d \tag{2.142}
$$

	^{4}He	^{12}C	^{56}Fe
a'_0......	-0.01317	0.02231	0.02584
a'_1......	0.00957	-0.00589	-0.00894
a'_2......	-0.00204	-0.00279	-0.00097
a'_3......	-0.00005	-0.00073	-0.00125
a'_4......	-0.00003	-0.00043	-0.00045
b'_1......	0.00661	-0.00095	-0.00739
b'_2......	0.00135	-0.00059	-0.00190
b'_3......	-0.00035	0.00002	-0.00062
c'......	-0.00811	-0.00729	0.00167
d'......	0.05098	0.06630	0.09950
i'_0......	-0.00338	0.00024	0.00480
i'_1......	0.00231	0.00018	-0.00271
i'_2......	-0.00047	-0.00028	0.00047
i'_3......	-0.00003	0.00012	0.00001
i'_4......	0.00000	-0.00004	-0.00001
j'_1......	0.00111	0.00339	0.00604
j'_2......	0.00042	-0.00082	-0.00197
j'_3......	-0.00010	0.00015	0.00044
k'......	-0.00161	-0.00212	-0.00320
l'......	0.01013	0.01332	0.02012

表 2.11: ニュートリノ制動放射過程 (結晶格子相のとき) フィッティング係数 $F'_{phonon}(u,171), G'_{phonon}(u,171)$。

$$F_{lattice}(u,5000) = \frac{e_0}{2} + \sum_{m=1}^{4} e_m \cos mu + \sum_{m=1}^{3} f_m \sin mu + gu + h \tag{2.143}$$

$$G_{lattice}(u,171) = \frac{i_0}{2} + \sum_{m=1}^{4} i_m \cos mu + \sum_{m=1}^{3} j_m \sin mu + ku + l \tag{2.144}$$

$$G_{lattice}(u,5000) = \frac{p_0}{2} + \sum_{m=1}^{4} p_m \cos mu + \sum_{m=1}^{3} q_m \sin mu + ru + s \tag{2.145}$$

$$F'_{phonon}(u,171) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{4} a'_m \cos mu + \sum_{m=1}^{3} b'_m \sin mu + c'u + d' \tag{2.146}$$

$$G'_{phonon}(u,171) = \frac{i'_0}{2} + \sum_{m=1}^{4} i'_m \cos mu + \sum_{m=1}^{3} j'_m \sin mu + k'u + l' \tag{2.147}$$

$$v = \sum_{m=0}^{3} \alpha_m \Gamma^{-m/3} \tag{2.148}$$

	^{4}He	^{12}C	^{56}Fe
α_0......	1.6449	0.6252	0.6798
α_1......	-23.2588	10.6819	12.7527
α_2......	272.1670	-70.6879	-140.1800
α_3......	-1074.7000	-44.3349	268.8290
β_0......	1.6443	0.6307	0.7783
β_1......	-23.2414	10.4966	10.2315
β_2......	272.0080	-68.7973	-124.2640
β_3......	-1074.2500	-50.0581	241.3060
α'_0......	-0.1394	0.5481	0.2847
α'_1......	7.0680	-20.4731	-13.0828
α'_2......	-115.5940	224.9220	192.5030
α'_3......	619.9170	-534.9400	-543.1480
β'_0......	-0.1394	0.5413	0.3221
β'_1......	7.0664	-20.2069	-13.8640
β'_2......	-115.5800	220.7060	201.0700
β'_3......	619.8790	-524.1240	-573.1160

表 2.12: ニュートリノ制動放射過程 (結晶格子相のとき) フィッティング係数 v, w, v', w'。

$$w = \sum_{m=0}^{3} \beta_m \Gamma^{-m/3} \tag{2.149}$$

$$v' = \sum_{m=0}^{3} \alpha'_m \Gamma^{-m/3} \tag{2.150}$$

$$w' = \sum_{m=0}^{3} \beta'_m \Gamma^{-m/3} \tag{2.151}$$

フィッティング係数を表 2.9 から表 2.12 に示す。

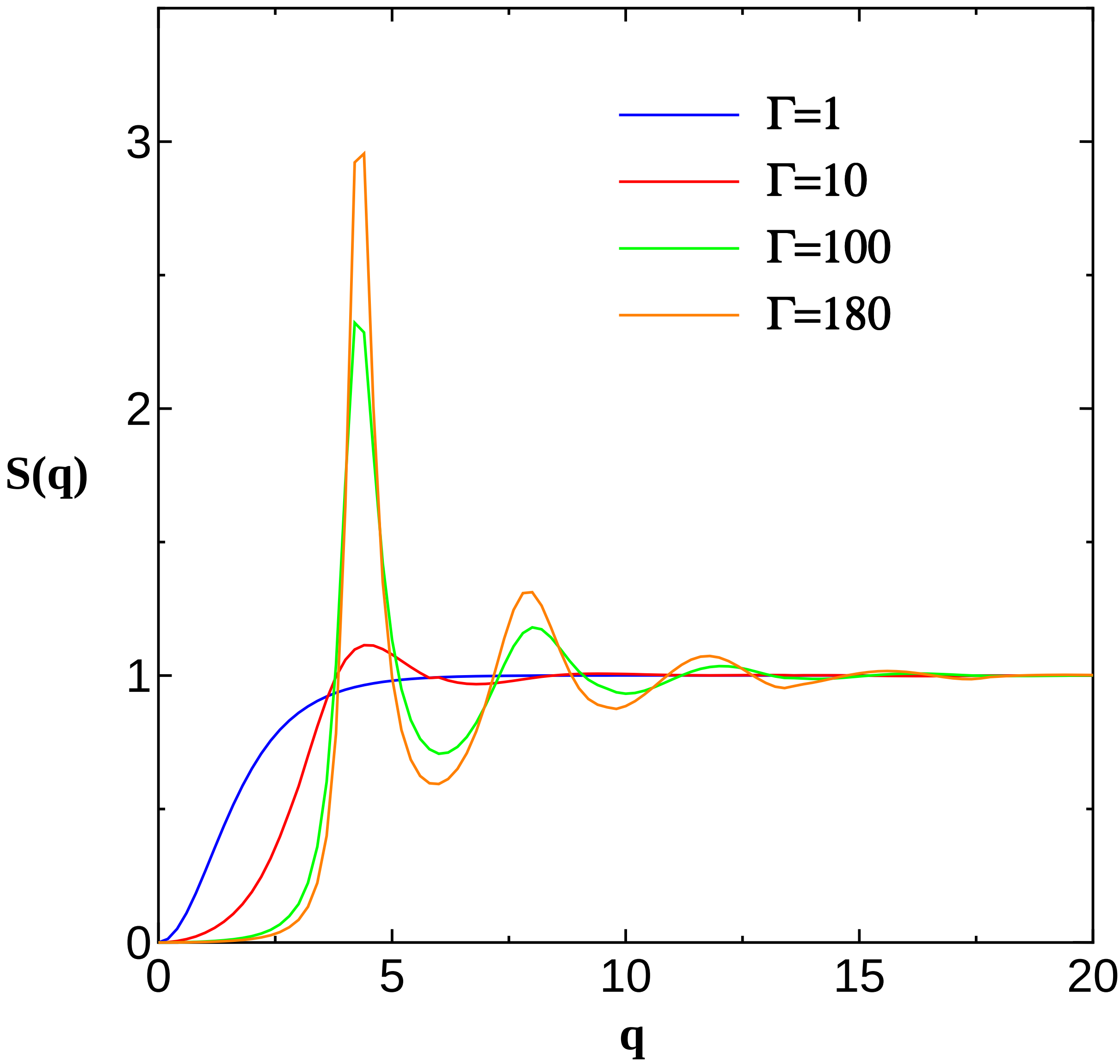

図 2.32: 構造因子 $S(q)$。

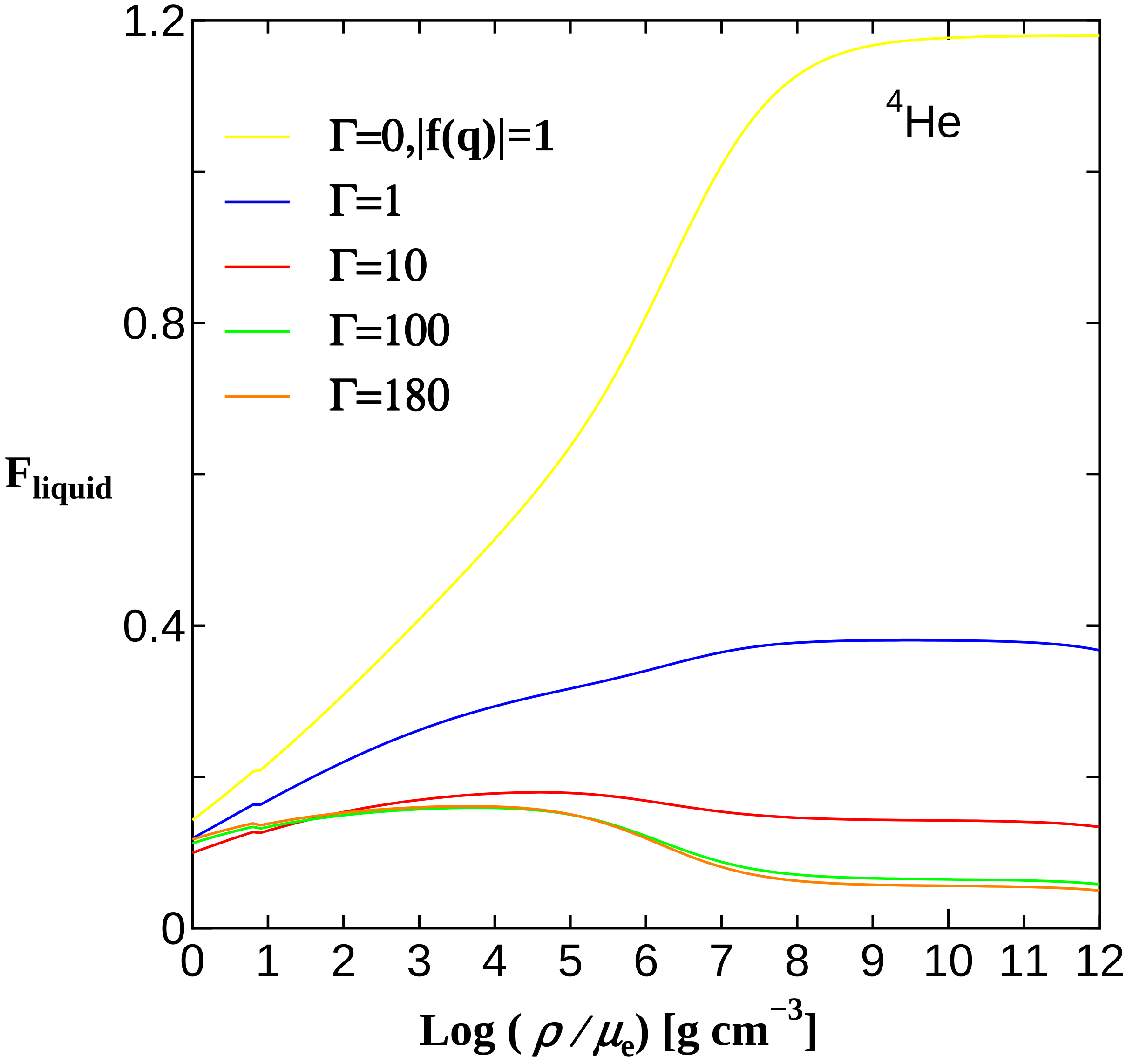

図 2.33: ^{4}He のときの F_{liquid} の値。

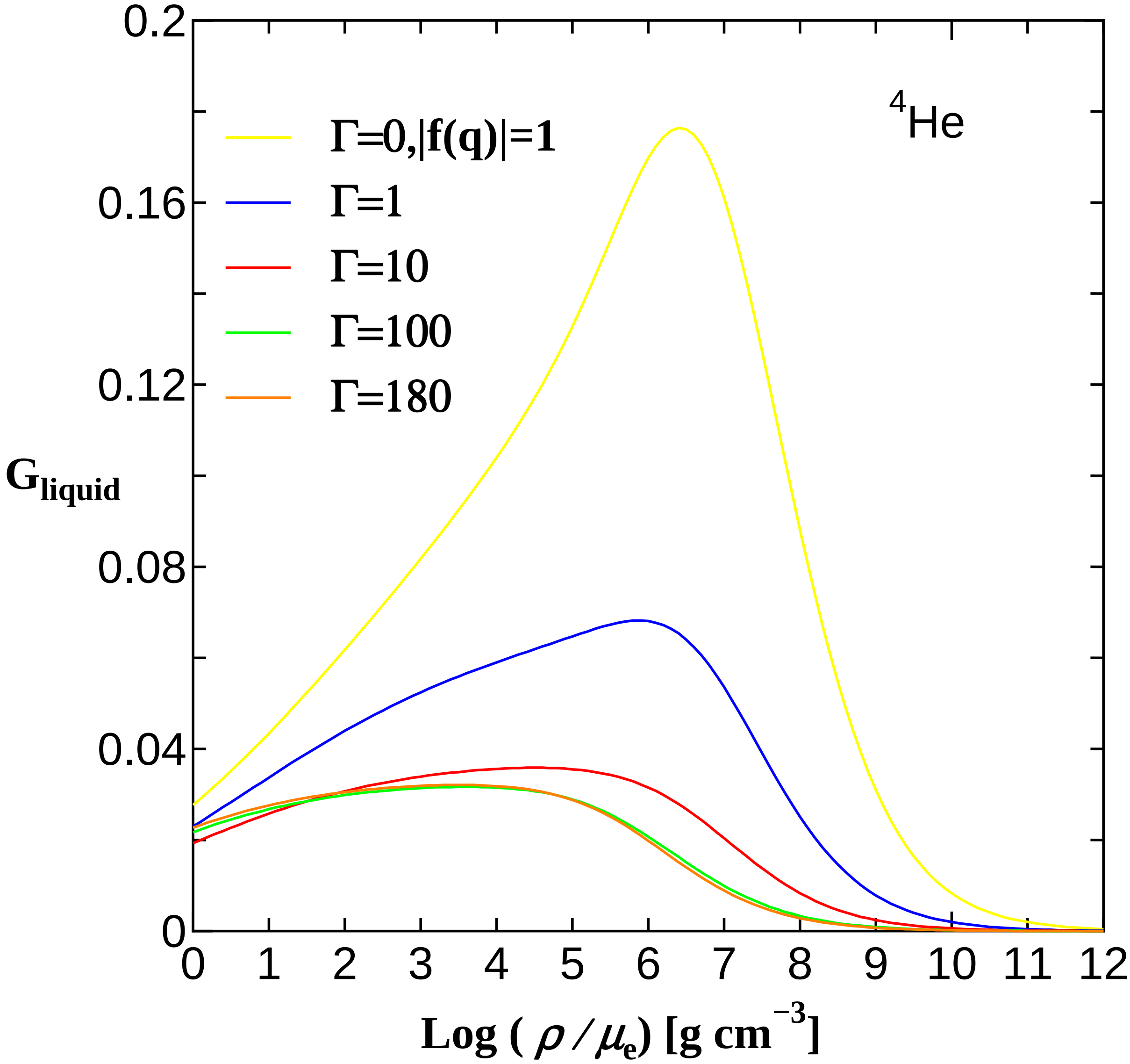

図 2.34: ^{4}He のときの G_{liquid} の値。

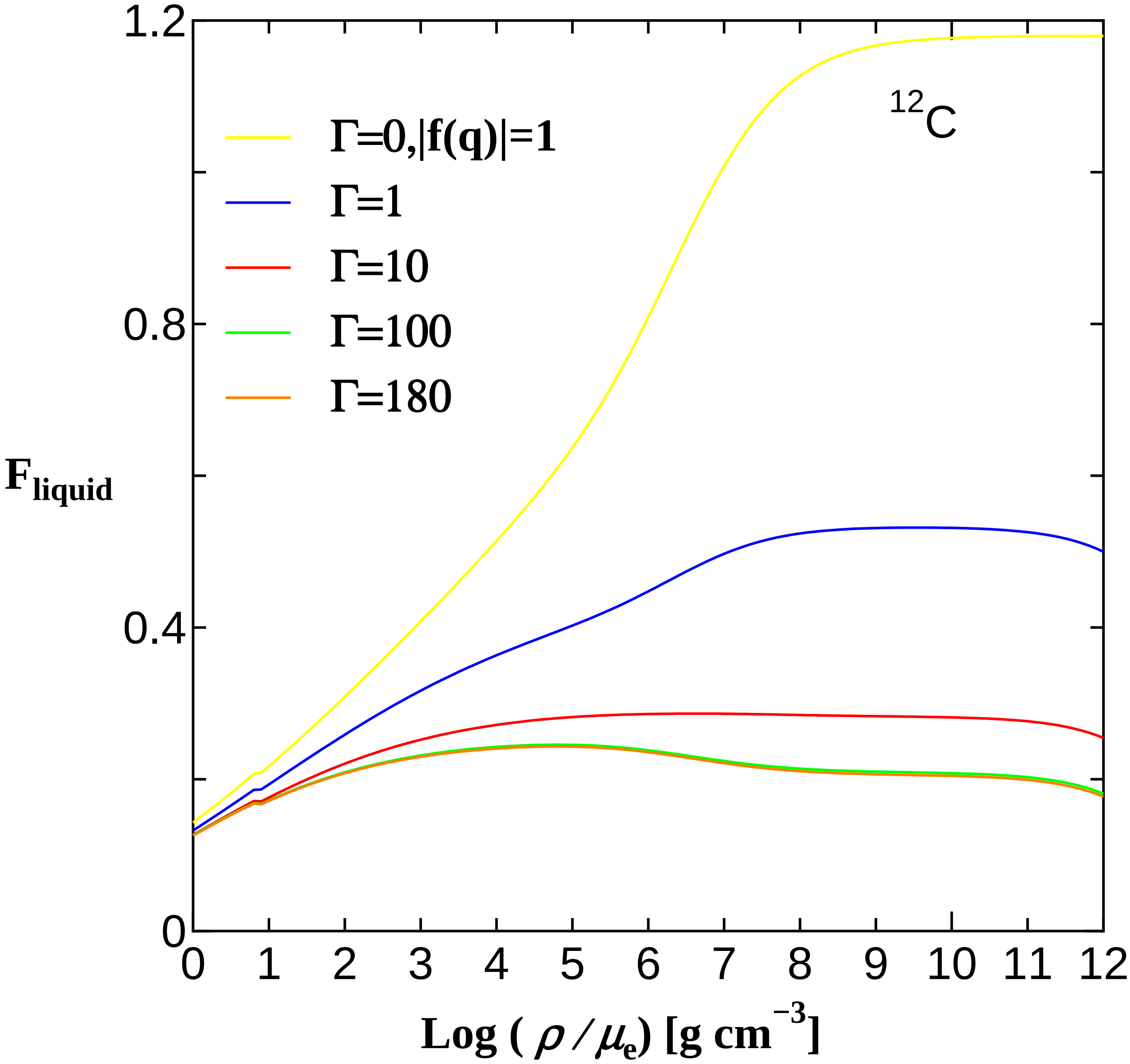

図 2.35: ^{12}C のときの F_{liquid} の値。

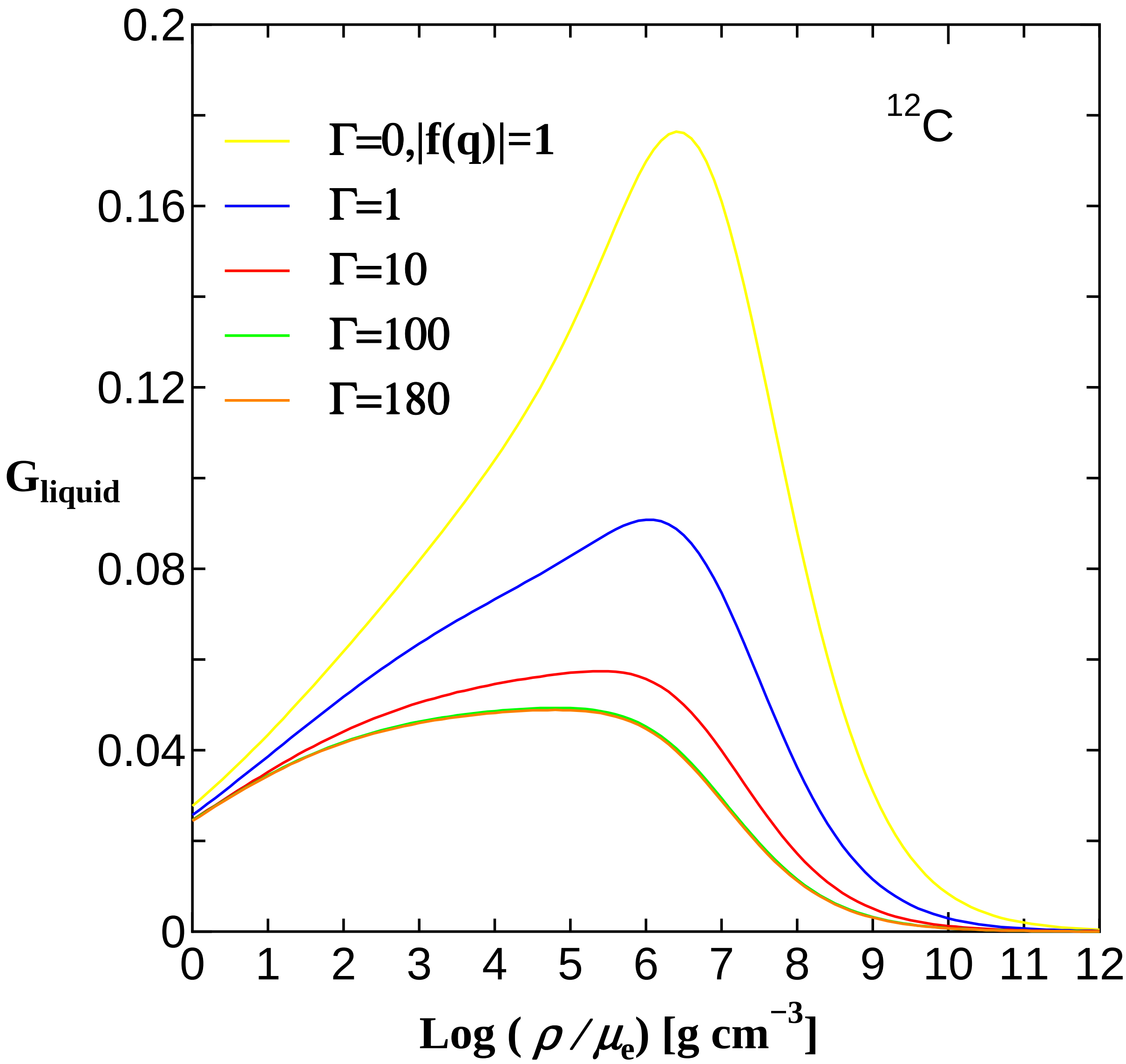

図 2.36: ^{12}C のときの G_{liquid} の値。

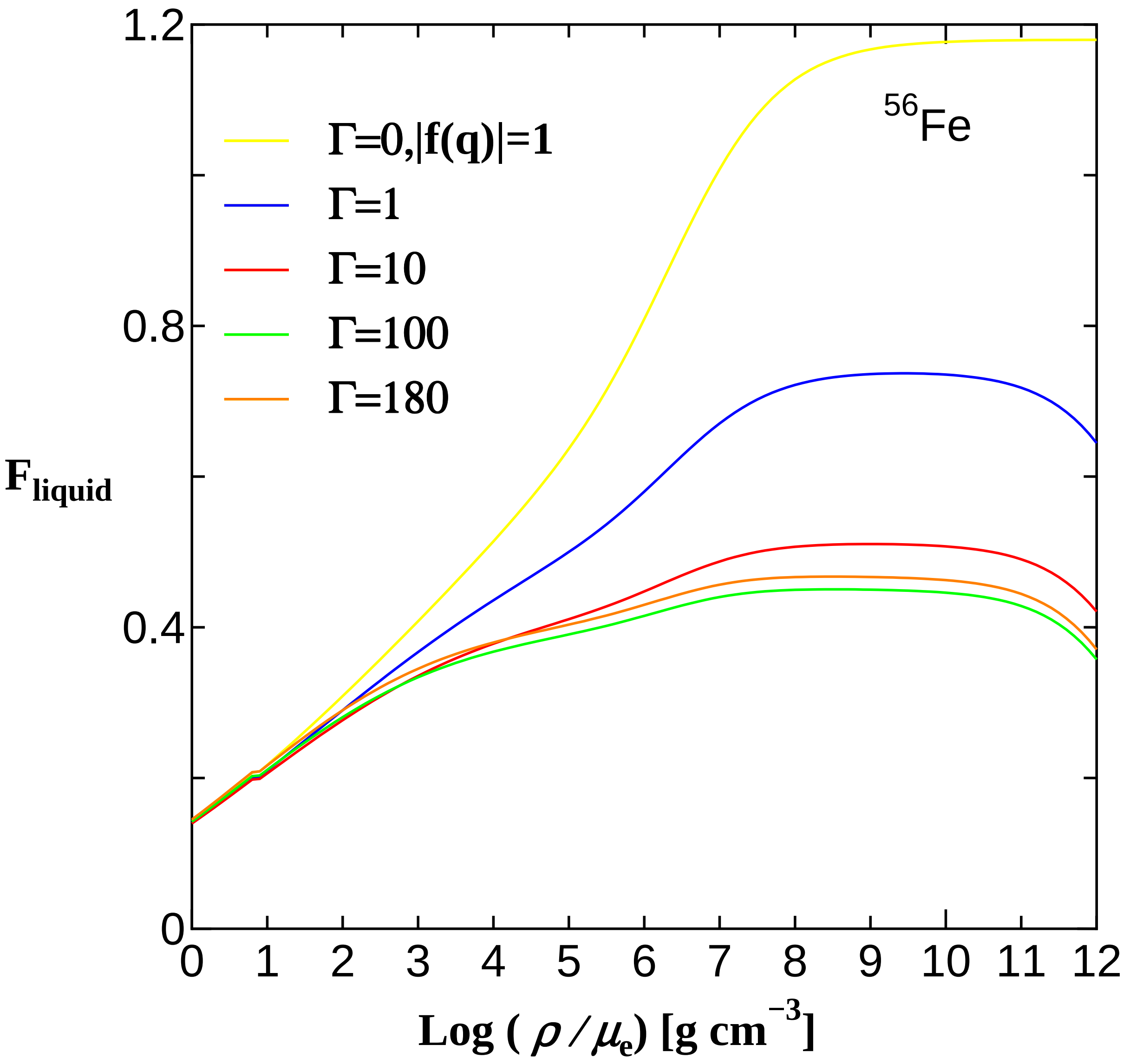

図 2.37: ^{56}Fe のときの F_{liquid} の値。

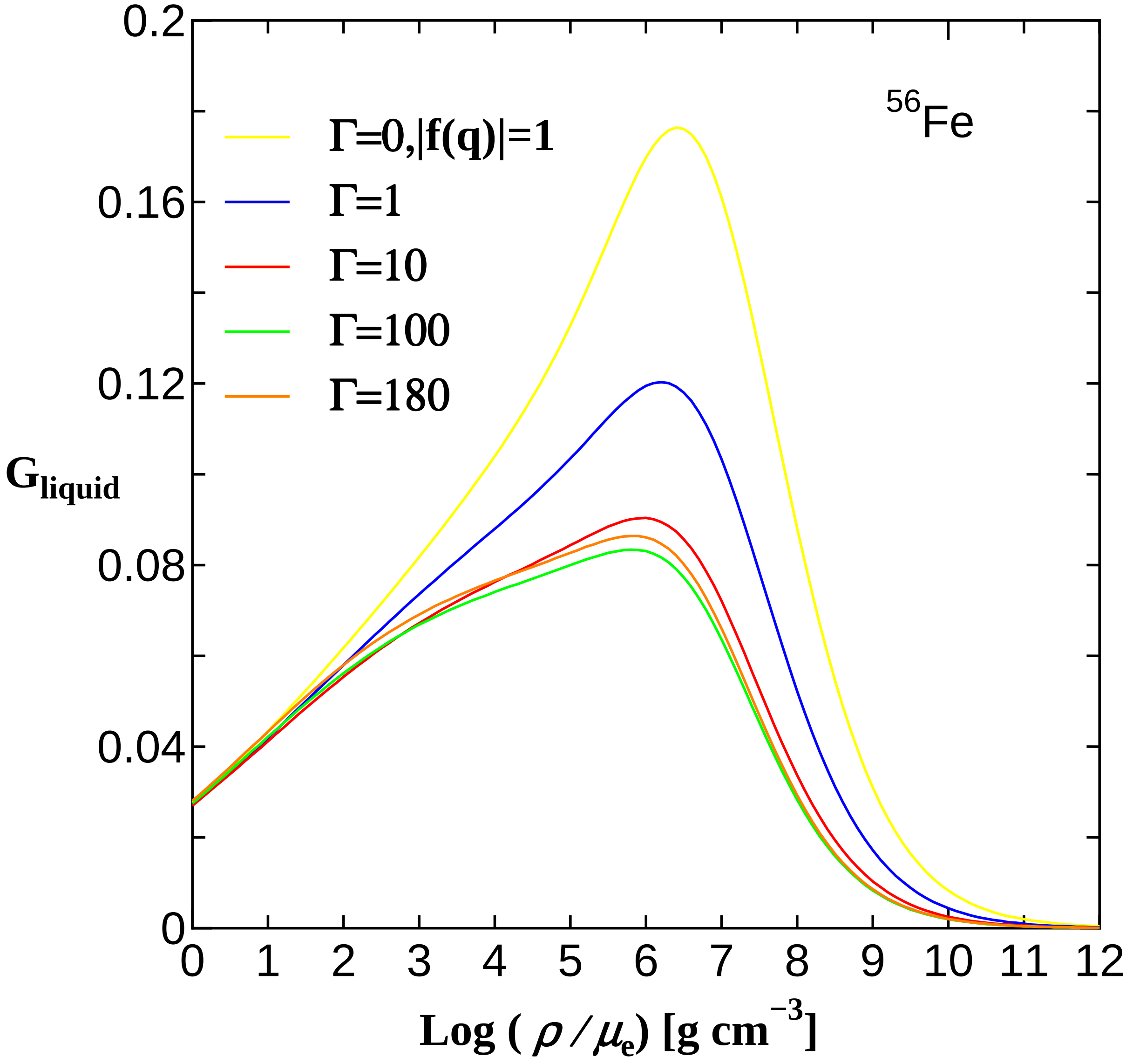

図 2.38: ^{56}Fe のときの G_{liquid} の値。

2.5　再結合ニュートリノ放射過程

自由電子がイオンに捕まりその軌道上の電子となる際、エネルギーの差分をニュートリノとして放射する過程である。この過程は図 2.39 に示すような過程である。

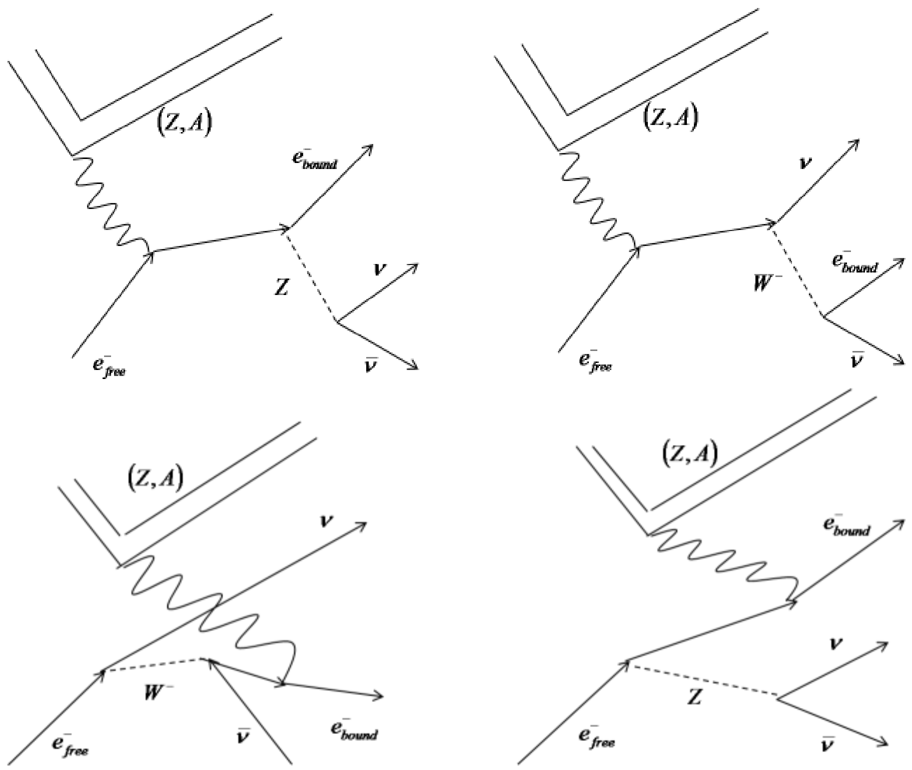

図 2.39: 再結合ニュートリノ放射過程のファインマンダイアグラム。

この再結合ニュートリノ放射過程についてもニュートリノ制動放射過程と同様に、イオンの種類によって損失率が異なる過程である。これは、G.Beaudet、V.Petrosian、E.E.Salpeter や V.S.Pinaev によって研究が行われてきた。そして、Y.Kohyama、N.Itoh、A.Obama、H.Mutoh によって、他の過程同様にワインバーグ・サラム理論を用いて計算が行われた。さらに、この時には、クーロン場を考慮した。

ここでは、Y.Kohyama、N.Itoh、A.Obama、H.Mutoh によって計算された結果作られた解析的フィッティング式を計算条件とともに紹介する。

2.5.1　解析フィッティング式

この計算は、非相対論を仮定して行っている。そのため、密度・温度領域は以下のようになる。

$$\frac{\rho}{\mu_e} \ll 10^6 \left(\mathrm{g\ cm^{-3}}\right) \tag{2.152}$$

$$T \ll 6 \times 10^9 \left(\mathrm{K}\right) \tag{2.153}$$

ν	a_1	a_2	a_3	b	c	d	f_1	f_2	f_3
$-20 \leq \nu < 0$......	1.51E-2	2.42E-1	1.21	3.71E-2	9.06E-1	9.28E-1	0	0	0
$0 < \nu \leq 10$.........	1.23E-2	2.66E-1	1.30	1.17E-1	8.97E-1	1.77E-1	-1.20E-2	2.29E-2	-1.04E-3

表 2.13: 再結合ニュートリノ放射過程フィッティング係数。

さらに、この計算では自由電子が電子殻上の軌道へと落ちる時のエネルギー放出を考えるので、安定した軌道が必要である。しかし、高密度になると圧力電離によって安定した軌道がなくなってしまう。そこで、少なくとも K 殻は存在するという条件として以下の条件を加える。

$$E_F\left(\rho\right) \leq Z^2 Ry \tag{2.154}$$

ここで、E_F は 0K での電子のフェルミエネルギーである。条件式 (2.154) は以下のように数値的に書き換えられる。

$$\frac{\rho}{\mu_e} \leq 0.378 Z^3 \left(\mathrm{g\ cm^{-3}}\right) \tag{2.155}$$

これは、扱うイオンによって以下のようになる。

$$^{4}\mathrm{He} \quad \rho \leq 6.05 \left(\mathrm{g\ cm^{-3}}\right) \tag{2.156}$$

$$^{12}\mathrm{C} \quad \rho \leq 1.63 \times 10^2 \left(\mathrm{g\ cm^{-3}}\right) \tag{2.157}$$

$$^{56}\mathrm{Fe} \quad \rho \leq 1.43 \times 10^4 \left(\mathrm{g\ cm^{-3}}\right) \tag{2.158}$$

エネルギー損失率は以下のようになる。

$$Q_{recomb} = \left[\left(C_V^2 + \frac{3}{2}C_A^2\right) + n\left(C_V'^2 + \frac{3}{2}C_A'^2\right)\right] 2.649 \times 10^{-18} \frac{Z^{14}}{A} \rho \frac{1}{e^{\zeta+\nu}+1} J \left(\mathrm{ergs\ cm^{-3}\ s^{-1}}\right) \tag{2.159}$$

$$J = \int_0^\infty dx \left(1+x\right)^3 \frac{\exp\left(-4x^{-1/2}\cot^{-1}x^{-1/2}\right)}{1-\exp\left(-2\pi x^{-1/2}\right)} \frac{1}{e^{x\zeta-\nu}+1} \tag{2.160}$$

$$\zeta = \frac{I}{k_B T} = \frac{1.579 \times 10^5 Z^2}{T\,[\mathrm{K}]} \tag{2.161}$$

$$\nu = \frac{\mu}{k_B T} \tag{2.162}$$

I は、式 (2.154) で定義した K 殻電子の電離エネルギーであり、μ は、電子が非相対論的な時の化学ポテンシャルである。これは、温度が 0K の時のフェルミエネルギーに対応している。式 (2.162) の縮退パラメータ ν は、N.Itoh、K.Kojo、M.Nakagawa(1990) によって、以下のように与えられる。

$$5.526 \times 10^7 \frac{\rho}{T^{3/2}} \left(1 + \frac{0.992X}{1.008}\right) = F_{1/2}\left(\nu\right) \tag{2.163}$$

$$F_{1/2}\left(\nu\right) = \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^{x-\nu}+1} \tag{2.164}$$

X は全質量中に ^2H の占める割合であり、式 (2.163) は $\frac{Z}{A}=\frac{1}{2}$ の重イオンの場合である。$\frac{Z}{A}\neq\frac{1}{2}$ の重イオンの場合、式 (2.163) は以下のようになる。

$$5.526\times10^7\frac{\rho}{T^{3/2}}\frac{2Z}{A}=F_{1/2}\left(\nu\right) \tag{2.165}$$

数値的に解を得ることができない積分項 J についての解析的フィッティング式は以下のように与えられる。

$$J=\frac{\left(a_1z^{-1}+a_2z^{-2.25}+a_3z^{-4.55}\right)e^{\nu}}{1+be^{c\nu}\left(1+dz\right)} \tag{2.166}$$

$$z=\frac{\zeta}{1+f_1\nu+f_2\nu^2+f_3\nu^3} \tag{2.167}$$

フィッティング式の精度は、$1\leq Z\leq 26$、$10^{-3}\leq\zeta\leq10^1$、$-20\leq\nu\leq10$ において約 11%以内の誤差である。フィッティング係数 a_i,b,c,d,f_i を表 2.13 に示す。

第3章　ニュートリノ放射過程の評価

この章では、それぞれの放射過程を総合的に評価する。それは、ニュートリノによるエネルギー損失率は個々の過程のそれぞれの計算ももちろんの大切であるが、今後はこの結果を利用して恒星の進化などのモデル計算を行う際、個々の過程についてではなく全体としての寄与が大変重要になってくるからである。

それぞれの放射過程のエネルギー損失率は、温度、密度、さらにイオン組成 (ニュートリノ制動放射過程と再結合ニュートリノ放射過程のとき) によって変化する関数である。図 (3.1)〜図 (3.5) で、イオン組成に依存しないペアニュートリノ放射過程、フォトニュートリノ放射過程、そしてプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率の結果を示す。そして、図 (3.8)〜図 (3.10) で、イオン組成に依存するニュートリノ制動放射過程と再結合ニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率の結果を示す。さらに、図 (3.11)〜図 (3.13) は、^{4}He,^{12} C,^{56} Fe の 3 つのイオンの場合において、最も有効となる過程を示す領域区分図である。これらの図は、論文 [21] を参考にしている。

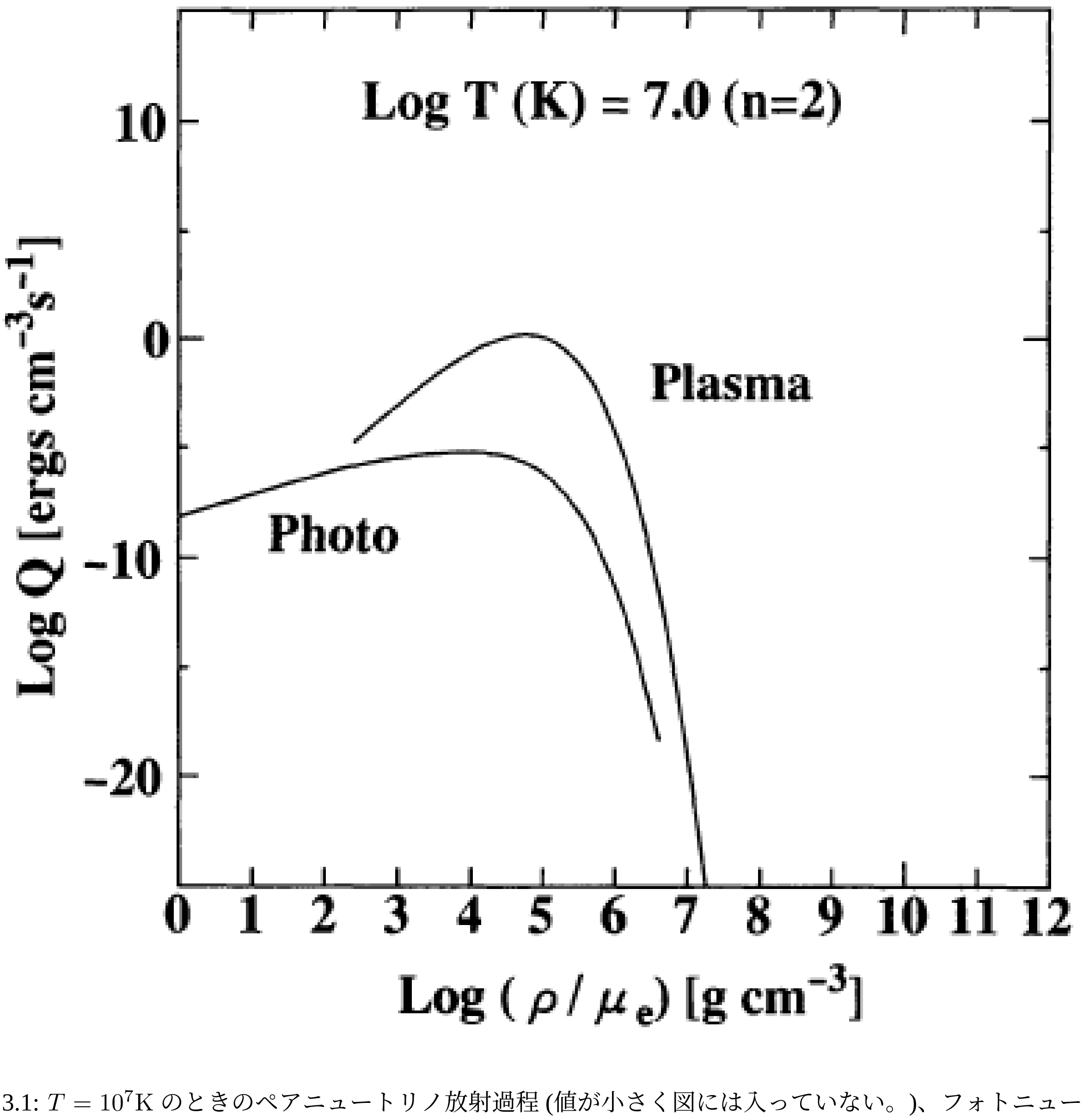

図 3.1: $T = 10^7$K のときのペアニュートリノ放射過程 (値が小さく図には入っていない。)、フォトニュートリノ放射過程、そしてプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

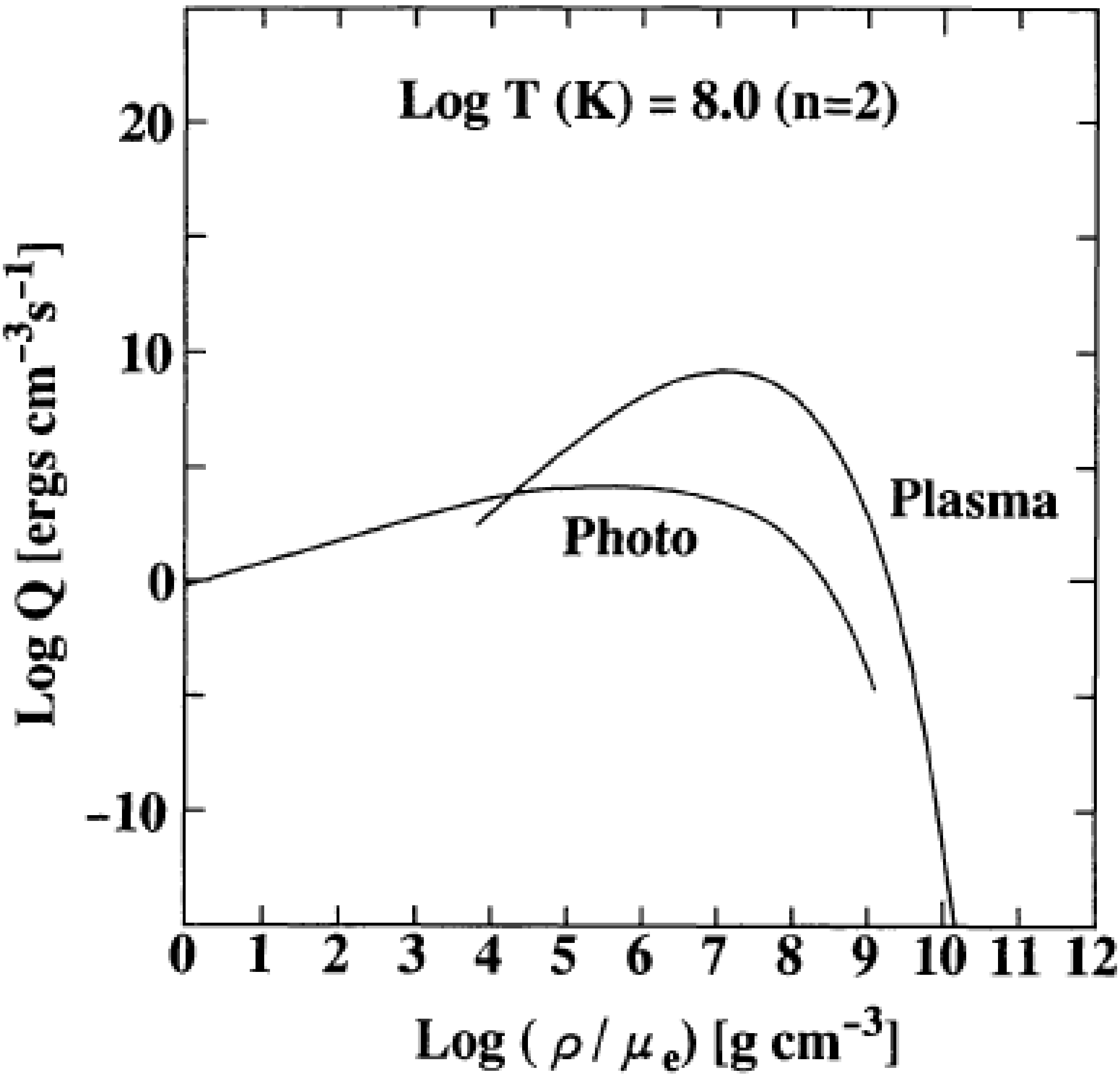

図 3.2: $T = 10^8$K のときのペアニュートリノ放射過程 (値が小さく図には入っていない。)、フォトニュートリノ放射過程、そしてプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

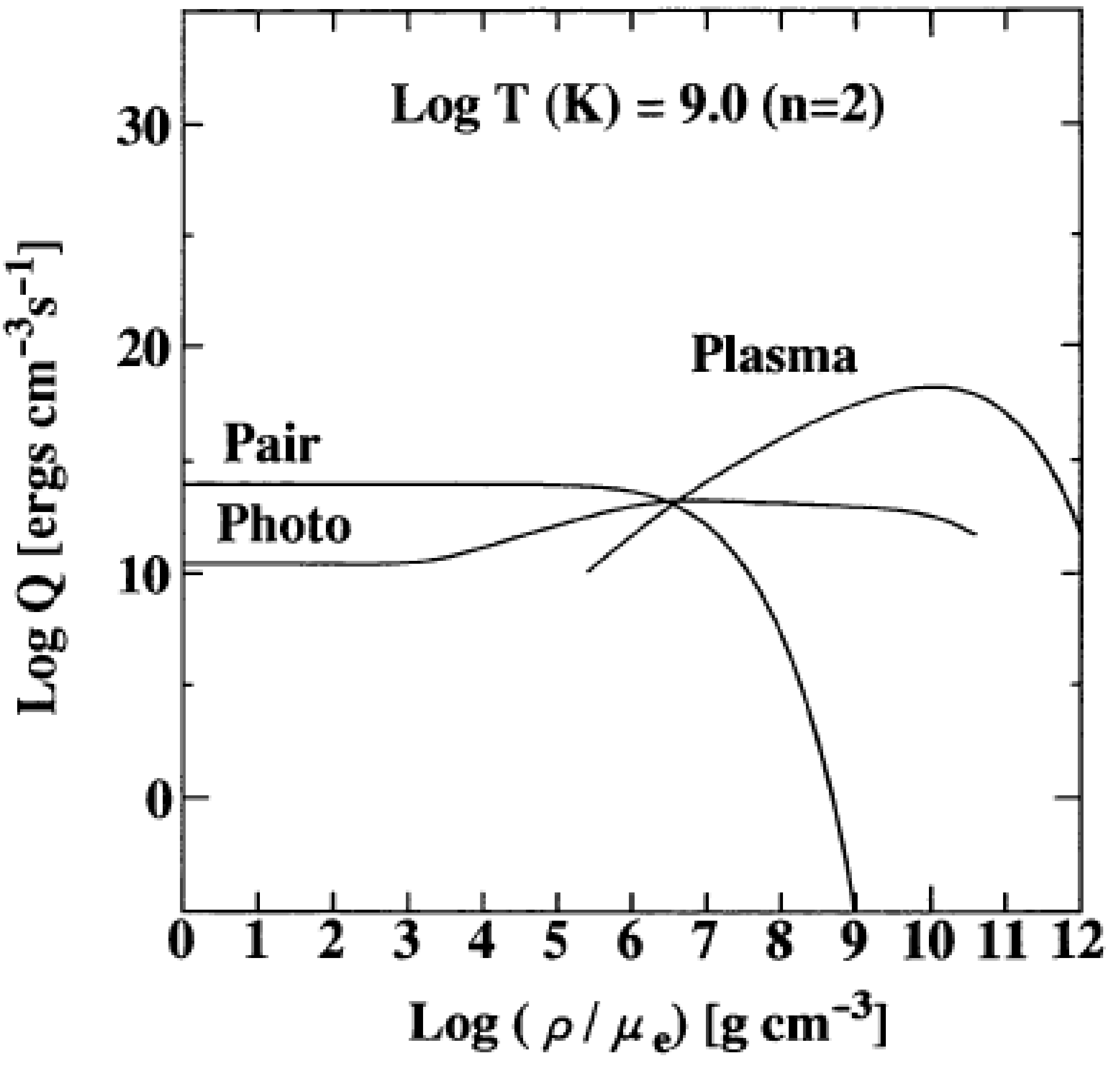

図 3.3: $T = 10^9$K のときのペアニュートリノ放射過程、フォトニュートリノ放射過程、そしてプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

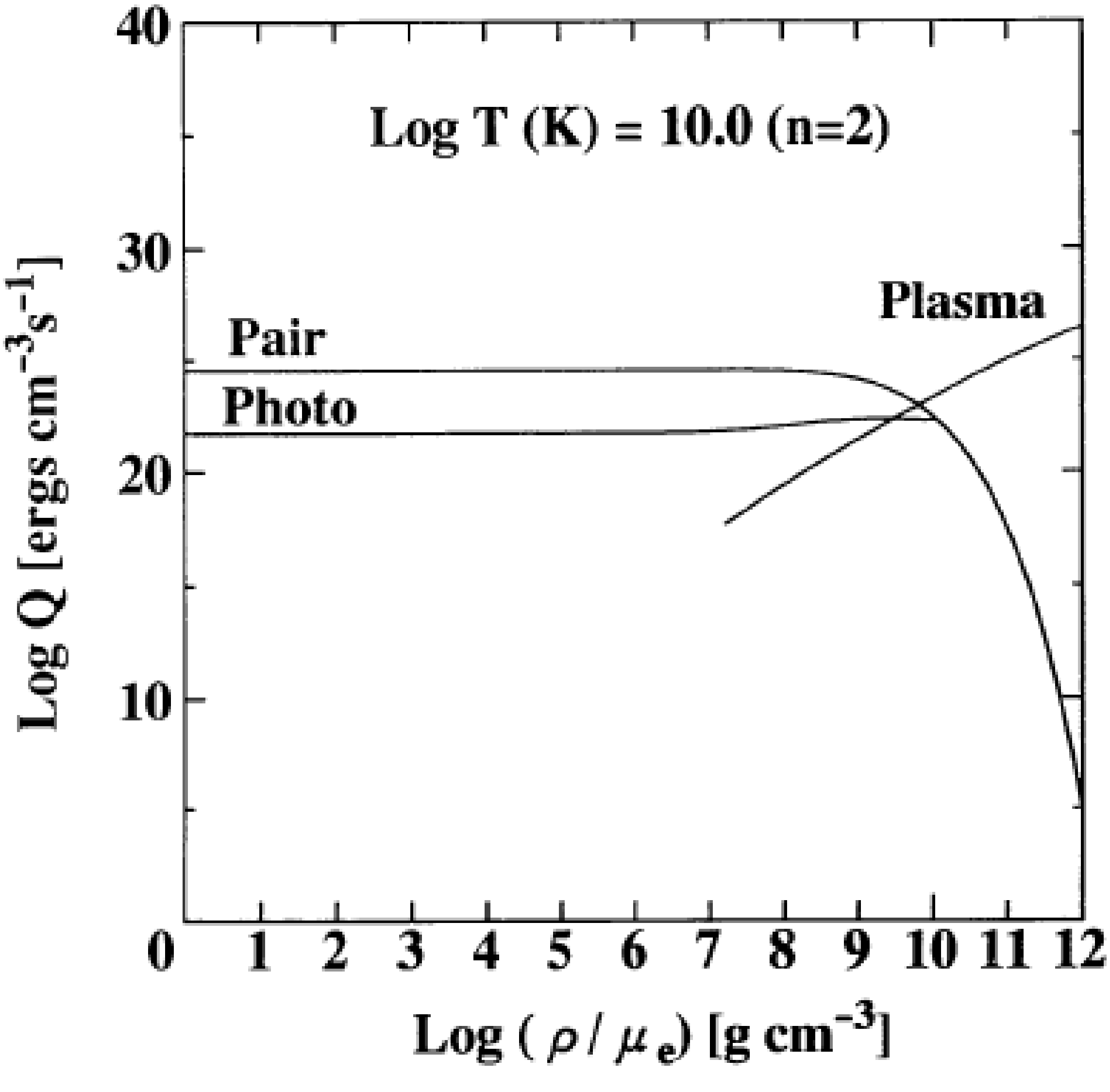

図 3.4: $T = 10^{10}$K のときのペアニュートリノ放射過程、フォトニュートリノ放射過程、そしてプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

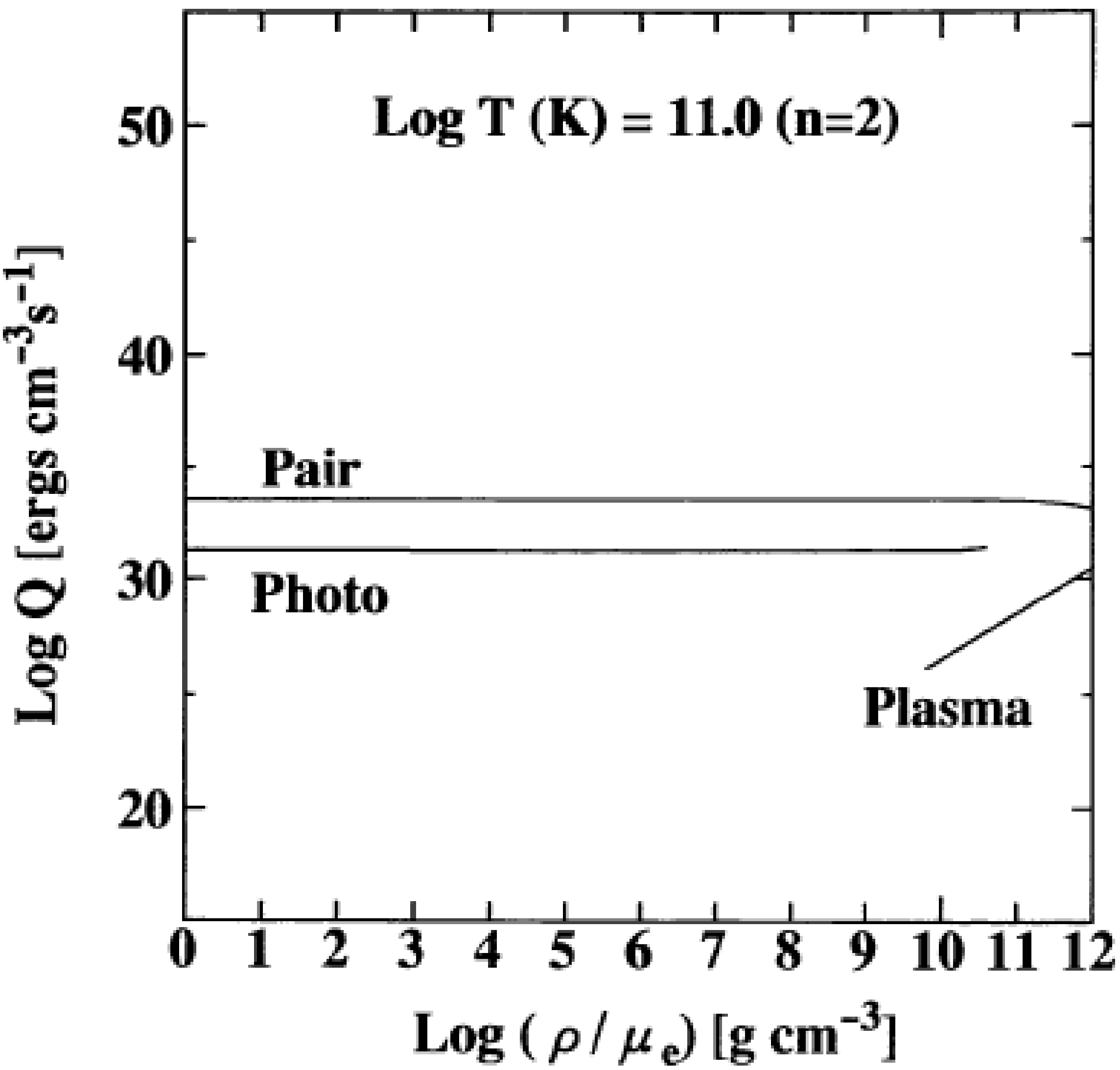

図 3.5: $T = 10^{11}$K のときのペアニュートリノ放射過程、フォトニュートリノ放射過程、そしてプラズマニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

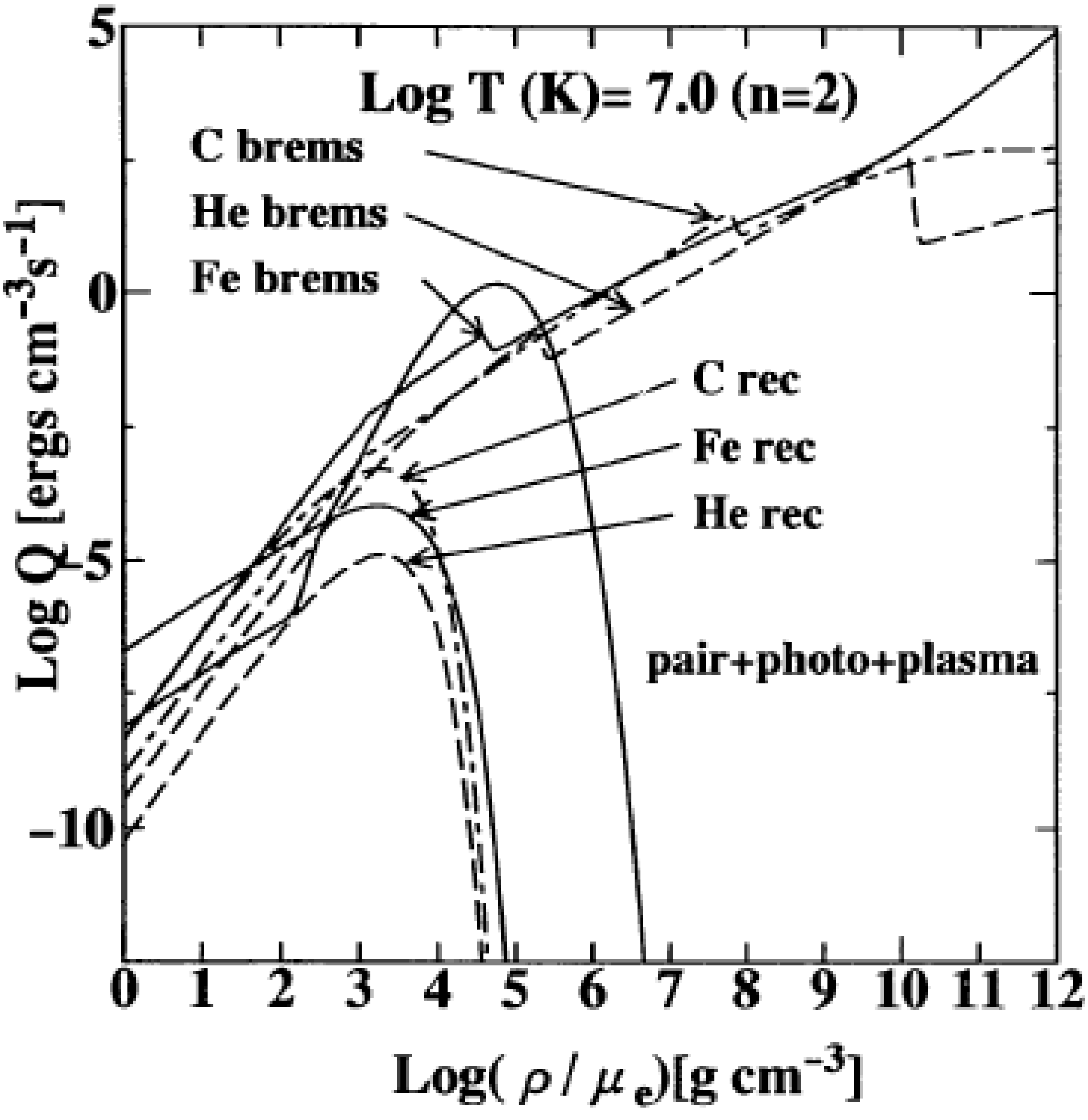

図 3.6: $T = 10^7$K のときのニュートリノ制動放射過程と再結合ニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

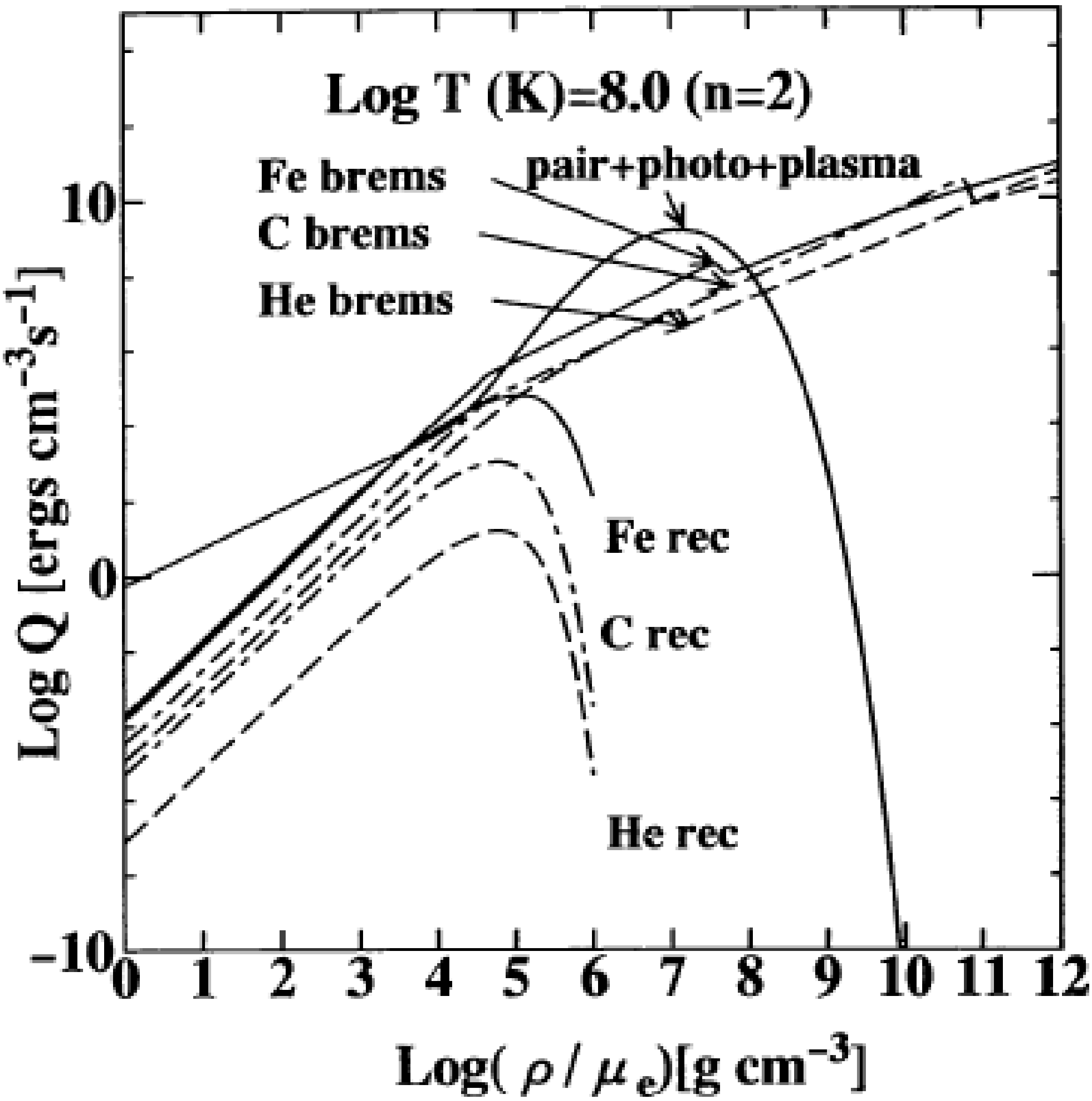

図 3.7: $T = 10^8$K のときのニュートリノ制動放射過程と再結合ニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

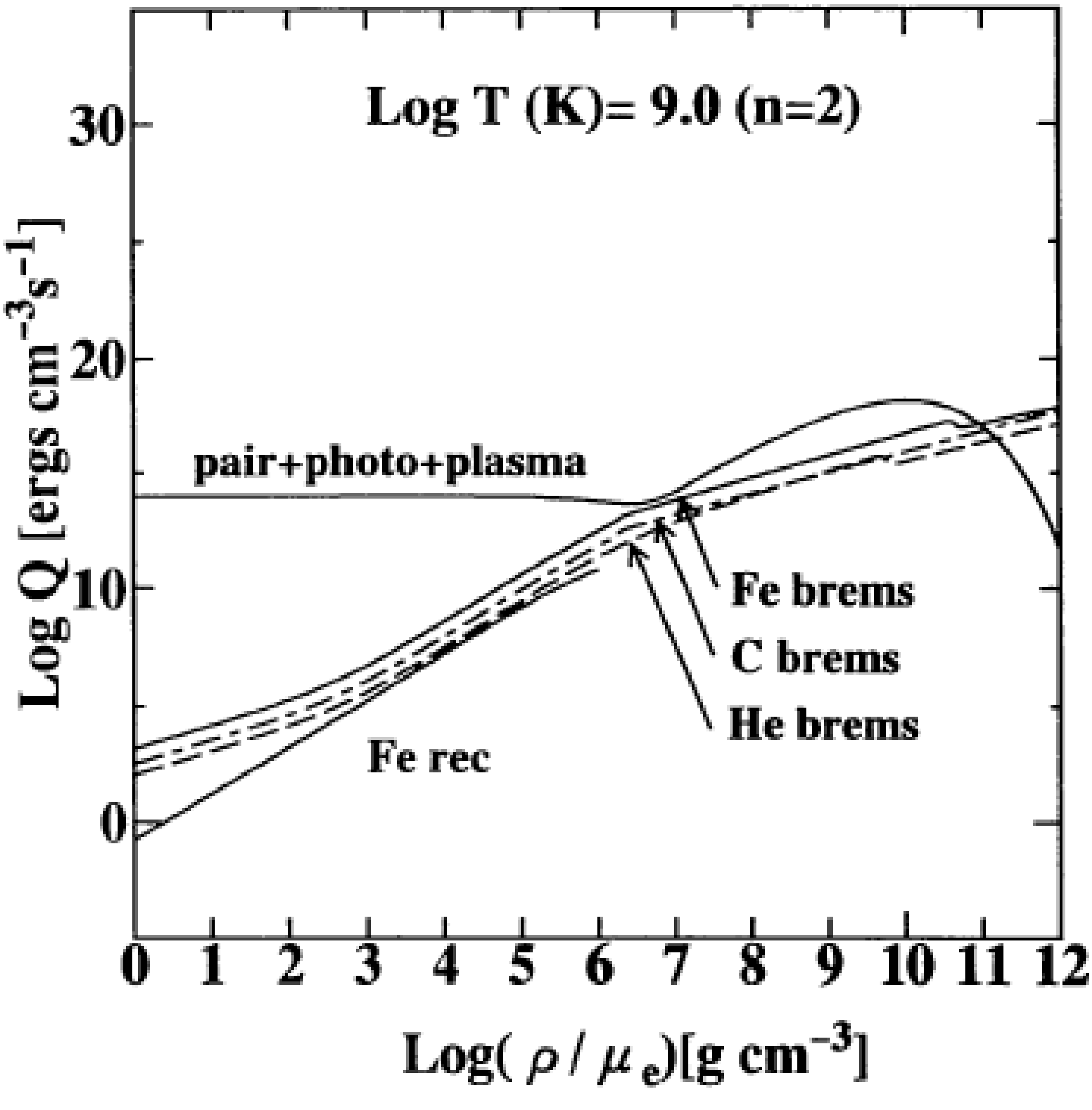

図 3.8: $T = 10^9$K のときのニュートリノ制動放射過程と再結合ニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

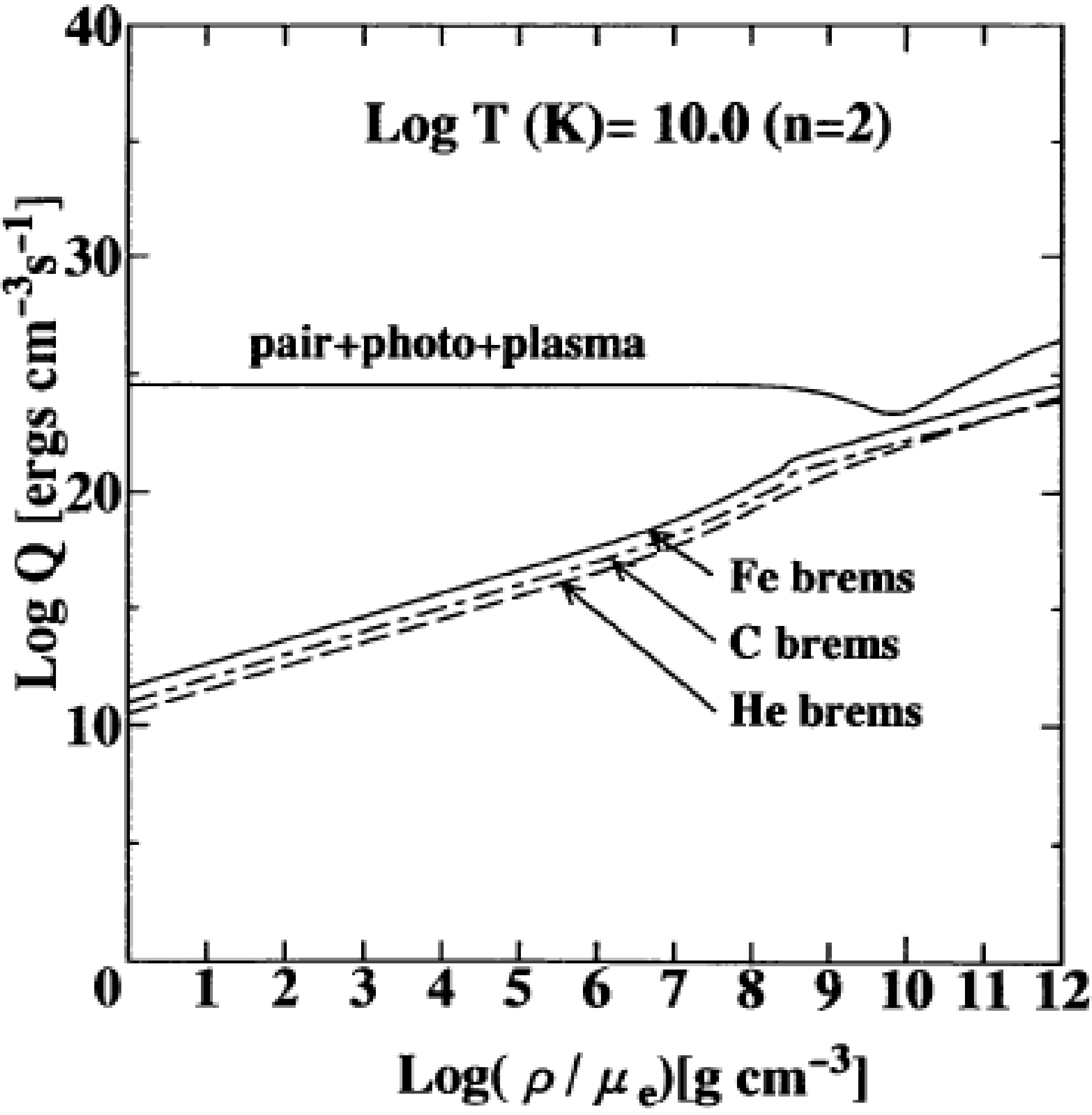

図 3.9: $T = 10^{10}$K のときのニュートリノ制動放射過程と再結合ニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

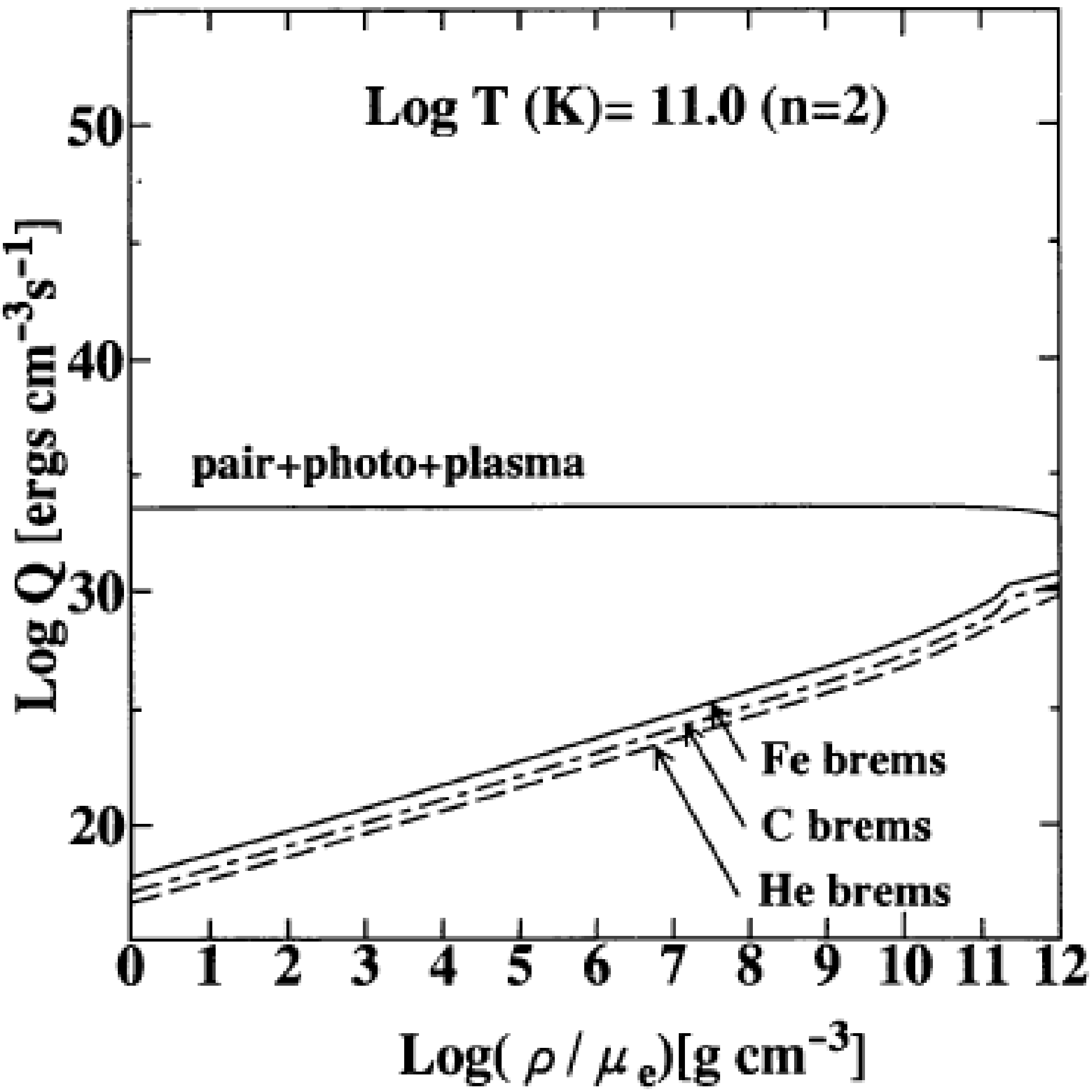

図 3.10: $T = 10^{11}$K のときのニュートリノ制動放射過程と再結合ニュートリノ放射過程のニュートリノエネルギー損失率。

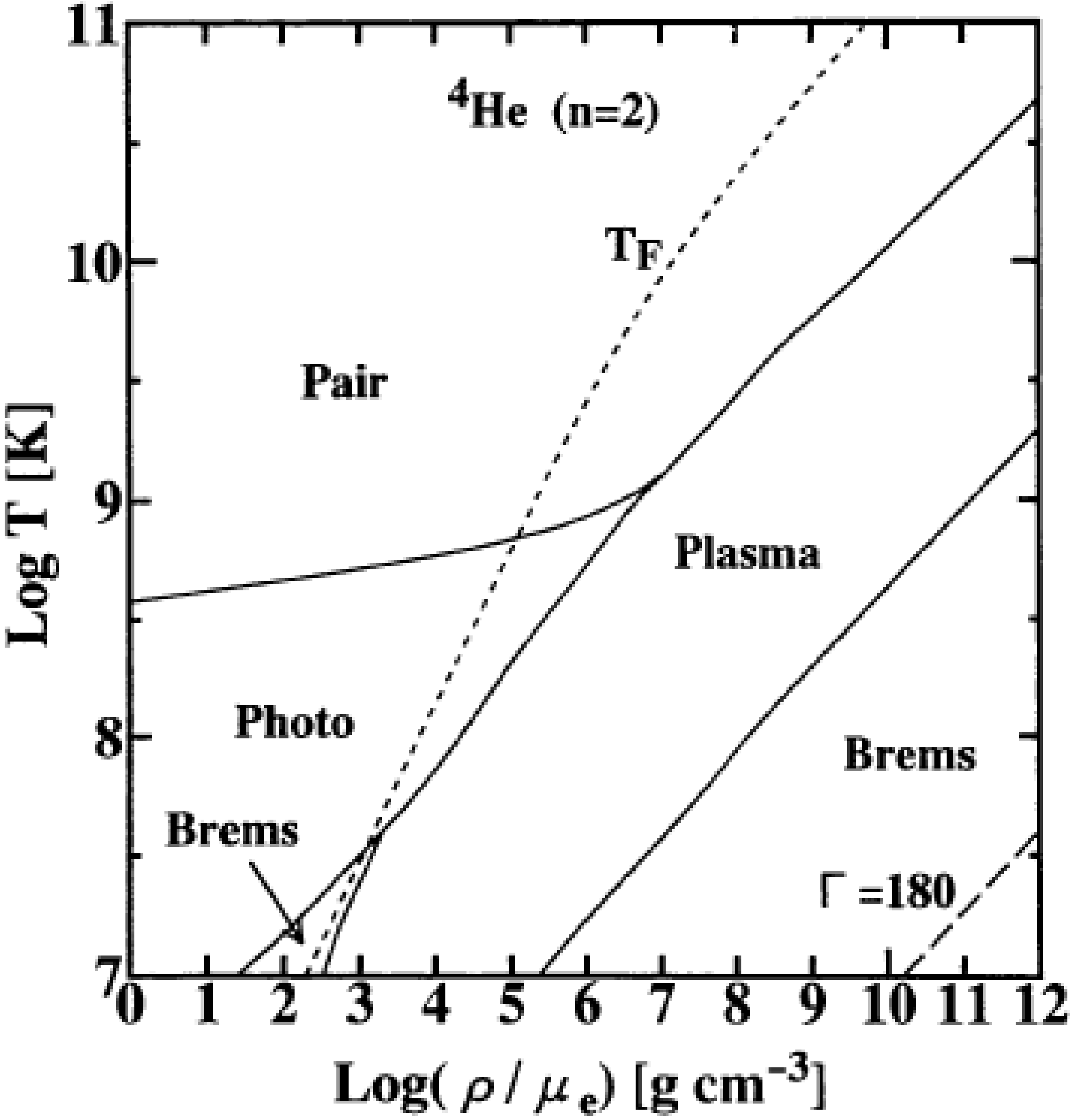

図 3.11: ^{4}He の場合に最も有効となる過程を示す領域区分図。

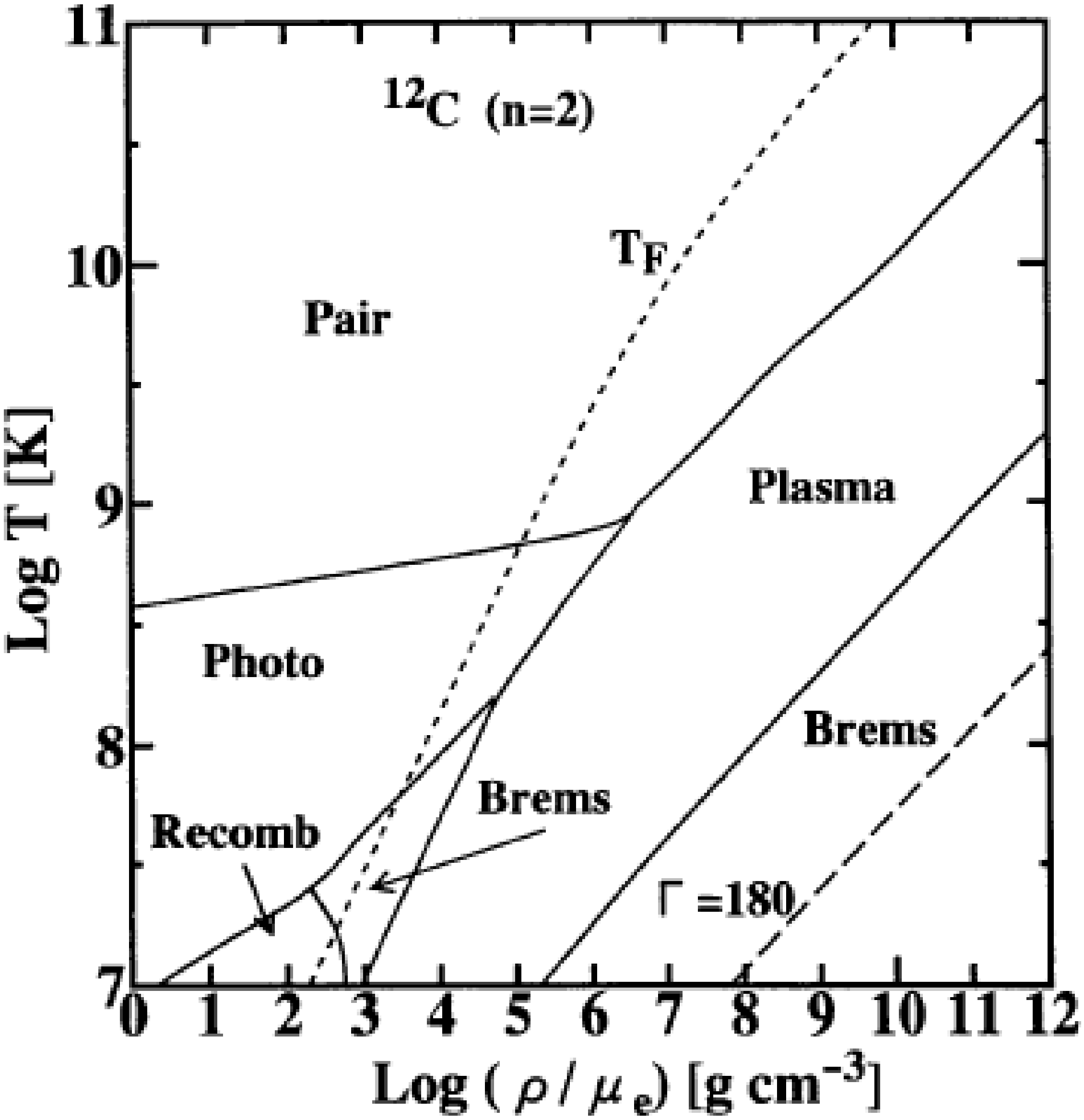

図 3.12: ^{12}C の場合に最も有効となる過程を示す領域区分図。

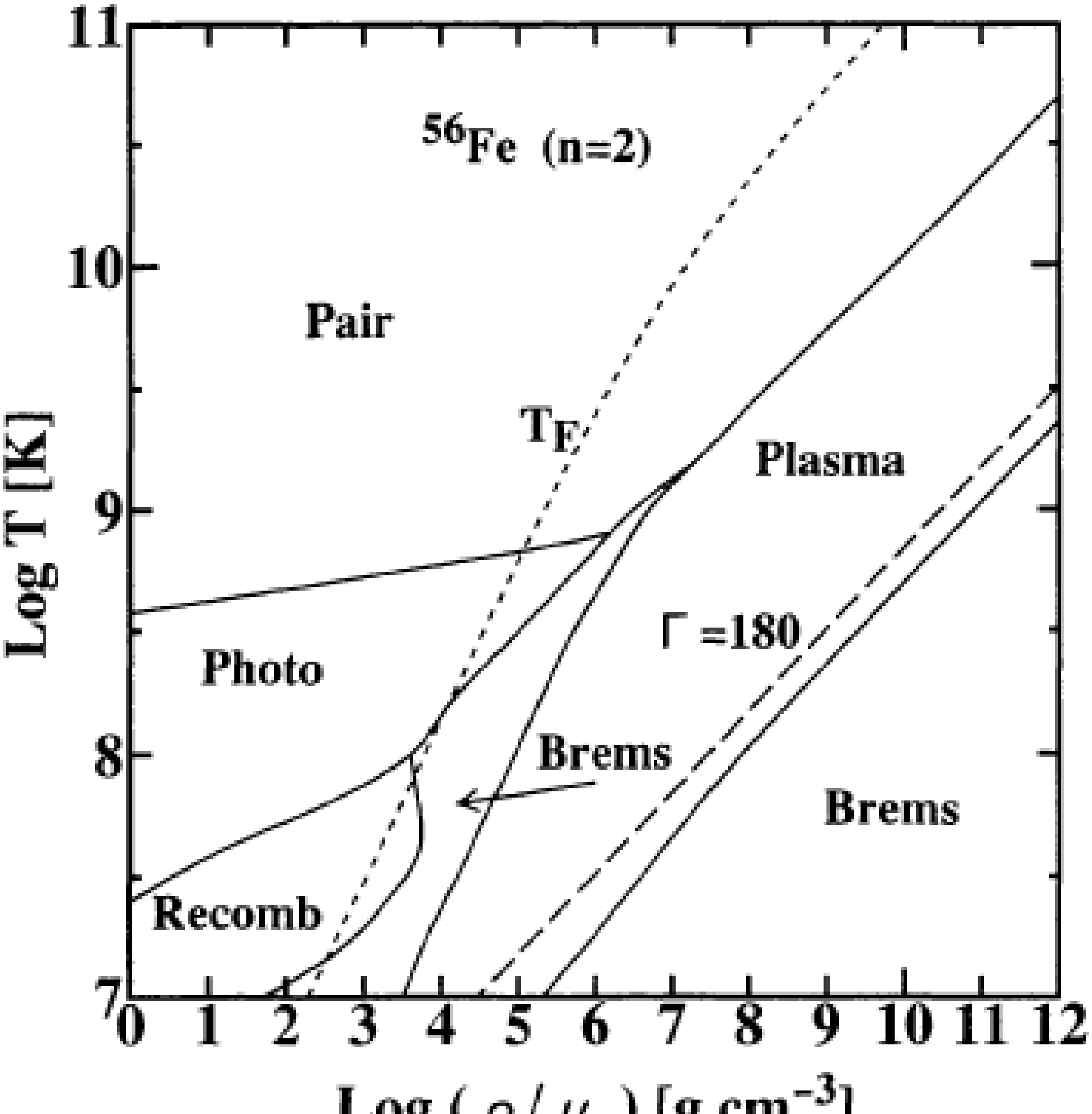

図 3.13: ^{56}Fe の場合に最も有効となる過程を示す領域区分図。

第4章　まとめ

ニュートリノによるエネルギー損失率は、天体物理学などの分野で大変重要な物理量である。特に白色矮星などのいわゆる恒星の進化の最終段階にある天体を考える上で、避けて通ることのできない研究である。このニュートリノによるエネルギー損失の過程は今回 5 つのものを扱った。その他にも様々な過程を経てニュートリノは生成され恒星から外部へと放出される。恒星の進化とは、すなわち恒星のエネルギー生成、及び放出に伴う物理状態の変化である。特に高密度状態では、光子によるエネルギー放出がほとんどされておらず、ニュートリノによるエネルギー放出が進化を担っていると言えるのである。本論文では、ニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の計算について記述をしてきた。その結果や考察を以下にまとめる。

第 2 章では、5 つのニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の計算と結果をそれぞれ記述した。

2.1 はペアニュートリノ放射過程、2.3 はプラズマニュートリノ放射過程、2.5 は再結合ニュートリノ放射過程を以前の論文に基づいて計算をし、結果を得た。

そして、2.2 ではフォトニュートリノ放射過程について、新たにエネルギー損失率の計算を行った。新たに計算を行った理由は次の 2 点である。まず 1 点目は、1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama によって計算されたものは、数値計算の 5 重積分を Monte Carlo 法を用いて計算している点である。2 点目は、1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama によって計算されたものは、論文 [17] の光子の分散関係を考慮に入れていないという点である。これらの理由から、本論文では新たに計算を行い、1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama によって計算されたものとの比較を行った。結果は、図 2.12 から図 2.24 に示すとおりである。図がいびつになっている箇所は、数値誤差である。ここで、この結果の考察を行う。

図 2.12 は、$T = 10^7$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) のエネルギー損失率の比較のグラフである。つまり、Monte Carlo 法による計算の精度を表している。値が 1.0 のとき、双方の計算値は一致している。密度領域 $10^{0.0} \le \rho/\mu_e(\mathrm{g\,cm^{-3}}) \le 10^{6.0}$ において、平均相対誤差は約 1% であり、最大相対誤差は、密度 $\rho/\mu_e(\mathrm{g\,cm^{-3}}) = 10^{6.0}$ で約 9% である。

図 2.13 は、$T = 10^7$K のときの数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れていないもの。) と数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のエネルギー損失率の比較のグラフである。つまり、光子の分散関係を考慮に入れた際のエネルギー損失率の変化を表している。密度領域 $10^{0.0} \le \rho/\mu_e(\mathrm{g\,cm^{-3}}) \le 10^{3.3}$ では、値は 1.0 となり、低密度側では光子の分散関係の影響はないことが分かる。最大相対誤差は、密度 $\rho/\mu_e(\mathrm{g\,cm^{-3}}) = 10^{6.0}$ で約 14% である。

図 2.14 は、$T = 10^7$K のときの 1989 年 Monte Carlo 法計算と今回の数値計算 (光子の分散関係を考慮に入れたもの。) のエネルギー損失率の比較である。つまり、1989 年の計算と本論文の計算の比較である。密度領域 $10^{0.0} \le \rho/\mu_e(\mathrm{g\,cm^{-3}}) \le 10^{6.0}$ において、平均相対誤差は約 3% であり、最大相対誤差は、密度 $\rho/\mu_e(\mathrm{g\,cm^{-3}}) = 10^{6.0}$ で約 24% である。図 2.12 と図 2.13 の結果を足し合わせた結果となっている。

$T = 10^7$K のとき、高密度側で計算結果に違いが生じてくることが分かる。しかし、図 3.11 などを見て頂

ければ分かるように、フォトニュートリノ放射過程が最も有効となる領域は、$T = 10^7$K では、密度領域は約 $10^{0.0} \leq \rho/\mu_e(\mathrm{g\,cm^{-3}}) \leq 10^{1.5}$ であり、高密度側ではフォトニュートリノ過程が効かないのである。

$T = 10^7$K のときに限らず、$T = 10^8$K、$T = 10^9$K、$T = 10^{10}$K においても同じ傾向の結果となる。よって、1989 年に N.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyama によって計算されたエネルギー損失率が、十分正確な値であるということを、本論文により確認することができた。

そして、2.4 ではニュートリノ制動放射過程について記述した。特に、液体金属相におけるエネルギー損失率は今回新たに計算を行った。1983 年に N.Itoh、Y.Kohyama によって計算されたものからの変更点は、次の 2 点である。1 点目は、イオン液体状態を表す構造因子 $S(q)$ を、論文 [15] で与えられているものを使っている点。2 点目は、低密度領域にまで数値計算を拡張して行ったことである。この 2 点の変更により結果は更新されることとなった。

また、解析フィッティング式を 5 つのニュートリノ放射過程すべてにおいて作成した。これらは大変精度の良いものとなっている。これを利用することで、すべての密度・温度領域においてエネルギー損失率を得ることができる。

第 3 章では、5 つのニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の結果を総合的にとらえた。最も有効な過程を示す領域区分図を利用することにより、自分の行っている研究の対象の密度、温度、そしてイオン組成が分かれば、どの過程を重点的に計算すればよいかが分かると言える。

本論文は、これまでのニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率の研究のまとめである。この分野における様々な研究の助けとなり、また新たな研究への助けとなり、宇宙物理学全体の発展に大きく寄与することを願う。

謝辞

最後に、研究にあたり様々な面からご指導いただきました当研究室の伊藤直紀教授、共同研究者である城西女子短期大学の野澤智教授、そして神山泰治先生へ心から深く感謝の意を表し、この場をお借りして厚く御礼申し上げます。

この研究室で過ごしてきた 3 年間はとても有意義なものとなりました。得ることができた知識と経験は、大変意義深いものです。

伊藤教授には、物理の基礎から厳しくも温かくご教授頂きました。毎朝のミーティングや木曜日のゼミの中では、研究の指針も含め多大なご指導をいただき、研究を行うことの大変さ、また面白さを学ぶことが出来ました。野沢教授には、計算プログラム、そして論文作成までご教授頂きました。神山先生には、日々の研究生活の中で計算プログラムの細かいところまでご教授頂くとともに、さまざまな計算のアプローチを教えていただきました。

また、同研究室の大学院生である坂本君、高橋君とは研究分野を含め宇宙物理学に関連した内容についての様々な議論をすることが出来ました。勉強以外の部分においても、一緒に楽しい時間を過ごせたことに感謝します。そして、学部時代に研究室の同期である小川君、剣持君、そして後輩の、半田君、中里君、渡辺君、原田君、飯田君、春日君、大崎君とも研究に関して有意義な議論を重ねるとともに楽しい時間を過ごすことが出来ました。学部時代の先輩である、大畑さん、須田さんには、多くを指導して頂き、大変感謝しております。

このように、様々な場において、伊藤直紀教授を始めとする多くの方々から大変貴重なご支援及び経験を授かり、大学院生として有意義な研究生活の日々を送ることが出来ましたことに対し、この上ない幸せを感じております。各位へ心から深く感謝の意を表し、この場をお借りして厚く御礼申し上げます。

最後に、大学院まで進学させていただき、ここまで育てくれた両親に深く感謝いたします。

付録A　フォトニュートリノ放射過程によるエネルギー損失率計算の導出

フォトニュートリノ過程

$$\gamma + e \to e + \nu_e + \bar{\nu}_e \tag{A.1}$$

を考える。有効相互作用は、

$$H_{eff} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}\left(p_2'\right)\gamma_\mu\left(C_V - C_A\gamma_5\right)u(\not{p}_1)\bar{u}_\nu\left(q_1\right)\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)v_\nu\left(q_2\right) \tag{A.2}$$

と表すことができる。上記反応の行列要素は、

$$\begin{aligned}
S_{fi} \equiv& \left\langle p_2 q_1 q_2 \left| H_{eff} \right| p_1 k \right\rangle \\
=& -i\left(\frac{Ge}{\sqrt{2}}\right)(2\pi)^4\delta^4\left(p_2+q_1+q_2-p_1-k\right)\bar{u}\left(q_1\right)\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)v\left(q_2\right) \\
&\cdot \bar{u}\left(p_2\right)\gamma_\mu\left(C_V-C_A\gamma_5\right)\frac{1}{\not{p}_1+\not{k}-m}\not{\epsilon}u\left(p_1\right)+\bar{u}\left(p_2\right)\not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}_2-\not{k}-m}\gamma_\mu\left(C_V-C_A\gamma_5\right)u\left(p_1\right) \\
&\cdot \left\langle f \left| b^\dagger\left(p_2\right)b\left(p_1\right)c^\dagger\left(q_1\right)d^\dagger\left(q_2\right)\tilde{a}(k) \right| i \right\rangle
\end{aligned} \tag{A.3}$$

単位時間、単位体積あたりでは、

$$\begin{aligned}
\frac{\left|S_{fi}\right|^2}{TV} =& \left(\frac{Ge}{\sqrt{2}}\right)^2(2\pi)^4\delta^4\left(p_2+q_1+q_2-p_1-k\right)N^{\lambda\sigma}E_{\lambda\sigma} \\
&\cdot \left\langle i \left| d\left(q_2\right)c\left(q_1\right)b^\dagger\left(p_1\right)b\left(p_2\right)b^\dagger\left(p_2\right)b\left(p_1\right)c^\dagger\left(q_1\right)d^\dagger\left(q_2\right)\tilde{a}^\dagger(k)\tilde{a}(k) \right| i \right\rangle
\end{aligned} \tag{A.4}$$

となる。そして、ニュートリノは非縮退とする。

$$\begin{aligned}
\left\langle i \left| \cdots \right| i \right\rangle =& \left\langle i \left| \left[1-N\left(p_2\right)\right]N\left(p_1\right)\tilde{a}^\dagger(k)\tilde{a}(k) \right| i \right\rangle \\
=& \left[1-f_F\left(p_2\right)\right]f_F\left(p_1\right)\left\langle i \left| \tilde{a}^\dagger(k)\tilde{a}(k) \right| i \right\rangle
\end{aligned} \tag{A.5}$$

横軸光子成分は以下のように与えられる。

$$A_t^\mu = \int d^3k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\omega^2}\omega^2\epsilon^t\right)\right]^{-1/2}\left[\epsilon^\mu(k)a(k)e^{-ikx}+\epsilon^\mu(k)a^\dagger(k)e^{ikx}\right] \tag{A.6}$$

ここで、

$$\epsilon^t \equiv 1-\frac{\Pi_t}{\omega^2} \tag{A.7}$$

$$\frac{1}{2\omega}\frac{\partial\left(\omega^2\epsilon^t\right)}{\partial\omega} = 1 \tag{A.8}$$

である。光子の分散関係は、1989年にN.Itoh、T.Adachi、M.Nakagawa、Y.Kohyamaの計算では、$\Pi_t = \omega_0^2$ である。本論文では、

$$\Pi_t(\omega, k) = \omega_0^2 \frac{3}{2v_\star^2}\left(\frac{\omega^2}{k^2} - \frac{\omega^2 - v_\star^2 k^2}{k^2}\frac{\omega}{2v_\star k}\ln\frac{\omega + v_\star k}{\omega - v_\star k}\right) \tag{A.9}$$

である。また、誘電関数を使用する限り、

$$\tilde{a}\left(k\right) = a\left(k\right) \tag{A.10}$$

となる。そのため、

$$\left\langle i \left| \cdots \right| i \right\rangle = \left[1 - f_F\left(p_2\right)\right] f_F\left(p_1\right) f_P\left(k\right) \tag{A.11}$$

である。ここで $f_F\left(p\right)$ と $f_P\left(k\right)$ は、それぞれ電子のフェルミ分布関数と光子のプランク分布関数である。

$$f_F\left(p\right) = \frac{1}{e^{\left(E_p - \mu\right)/k_B T} + 1} \tag{A.12}$$

$$f_P\left(k\right) = \frac{1}{e^{\omega/k_B T} - 1} \tag{A.13}$$

単位時間、単位体積あたりでは、

$$\begin{aligned}\frac{\left|S_{fi}\right|^2}{TV} &\equiv \left|M\right|^2 \\ &= \left(\frac{Ge}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(2\pi\right)^4 \delta\left(p_2 + q_1 + q_2 - p_1 - k\right)\left[1 - f_F\left(p_2\right)\right] f_F\left(p_1\right) f_P\left(k\right) N^{\lambda\sigma} E_{\lambda\sigma}\end{aligned} \tag{A.14}$$

となる。ここで $N^{\alpha\beta}$ と $E_{\alpha\beta}$ は、次のような式で与えられる。

$$\begin{aligned}N^{\alpha\beta} =& \mathrm{Tr}\left[\bar{v}\left(q_2\right)\gamma^0\left(1 - \gamma^5\right)\gamma^{\alpha\dagger}\gamma^0 u\left(q_1\right)\bar{u}\left(q_1\right)\gamma^\beta\left(a - \gamma^5\right)v\left(q_2\right)\right] \\ =& \mathrm{Tr}\left[\not{q}_2\gamma^\alpha\left(1 - \gamma^5\right)\not{q}_1\gamma^\beta\left(1 - \gamma^5\right)\right] \\ =& 2\mathrm{Tr}\left[\not{q}_2\gamma^\alpha\not{q}_1\gamma^\beta\left(1 - \gamma^5\right)\right] \\ =& 8\left[q_1^\alpha q_2^\beta + q_1^\beta q_2^\alpha - g^{\alpha\beta}\left(q_1 q_2\right) - i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{1\mu} q_{2\nu}\right]\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}E_{\alpha\beta} =& \mathrm{Tr}\left[\bar{u}\left(p_1\right)\gamma_0\left\{\not{\epsilon}^\dagger \frac{\not{p}_1^\dagger + \not{k}^\dagger + m}{2p_1\cdot k + \omega_0^2}\left(C_V - C_A\gamma_5\right)\gamma_\alpha^\dagger + \left(C_V - C_A\gamma_5\right)\gamma_\alpha^\dagger \frac{\not{p}_2^\dagger - \not{k}^\dagger + m}{-2p_2\cdot k + \omega_0^2}\not{\epsilon}^\dagger\right\}\gamma^0 u\left(p_2\right)\right. \\ &\left.\cdot\bar{u}\left(p_2\right)\left\{\gamma_\beta\left(C_A - C_V\gamma_5\right)\frac{\not{p}_1 + \not{k} + m}{2p_1\cdot k + \omega_0^2}\not{\epsilon} + \not{\epsilon}\frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{-2p_2\cdot k + \omega_0^2}\gamma_\beta\left(C_V - C_A\gamma_5\right)\right\}u\left(p_1\right)\right] \\ =& \mathrm{Tr}\left[\bar{u}\left(p_1\right)\left\{\not{\epsilon}\frac{\not{p}_1 + \not{k} + m}{2p_1\cdot k + \omega_0^2}\gamma_\alpha\left(C_V - C_A\gamma_5\right) + \gamma_\alpha\left(C_V - C_A\gamma_5\right)\frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{-2p_2\cdot k + \omega_0^2}\not{\epsilon}\right\}u\left(p_2\right)\right. \\ &\left.\cdot\bar{u}\left(p_2\right)\left\{\gamma_\beta\left(C_V - C_A\gamma_5\right)\frac{\not{p}_1 + \not{k} + m}{2p_1\cdot k + \omega_0^2}\not{\epsilon} + \not{\epsilon}\frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{-2p_2\cdot k + \omega_0^2}\gamma_\beta\left(C_V - C_A\gamma_5\right)\right\}u\left(p_1\right)\right] \\ \equiv& \mathrm{Tr}\left[\bar{u}\left(p_1\right)R_\alpha\left(p_1, p_2, k\right)u\left(p_2\right)\bar{u}\left(p_2\right)R_\beta\left(p_2, p_1, -k\right)u\left(p_1\right)\right]\end{aligned} \tag{A.16}$$

ここで、$R_\alpha\left(p_1, p_2, k\right)$ は次のように定義する。

$$R_\alpha\left(p_1, p_2, k\right) \equiv \not{\epsilon}\frac{\not{p}_1 + \not{k} + m}{2p_1\cdot k + \omega_0^2}\gamma_\alpha\left(C_V - C_A\gamma_5\right) + \gamma_\alpha\left(C_V - C_A\gamma_5\right)\frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{-2p_2\cdot k + \omega_0^2}\not{\epsilon} \tag{A.17}$$

また、以下のような変数を定義する。

$$\beta^{-1} \equiv p_1 \cdot k + \frac{1}{2}\omega_0^2 \tag{A.18}$$

$$\gamma^{-1} \equiv k \cdot p_2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 \tag{A.19}$$

$$p \equiv p_1 + k - p_2 \tag{A.20}$$

$$(\not{p}_1 + m)\not{\epsilon} u\,(p_1) = 2\,(p_1 \cdot \epsilon)\,u\,(p_1) - \not{\epsilon}\,(\not{p}_1 - m_e)\,u\,(p_1) = 2\,(p_1 \cdot \epsilon)\,u\,(p_1) \tag{A.21}$$

$$\bar{u}(p_1)\not{\epsilon}\,(\not{p}_1 + m) = \bar{u}\,(p_1) \cdot 2\,(\epsilon \cdot p_1) \tag{A.22}$$

$$(\not{p}_2 + m)\not{\epsilon} u(p_2) = 2(p_2 \cdot \epsilon)u(p_2) \tag{A.23}$$

$$\bar{u}(p_2)\not{\epsilon}\,(\not{p}_2 + m) = \bar{u}\,(p_2) \cdot 2\,(p_2 \cdot \epsilon) \tag{A.24}$$

よって、$E_{\alpha\beta}$ は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}E_{\alpha\beta} =&\mathrm{Tr}\left[\bar{u}\,(p_1)\left\{\beta\left((p_1 \cdot \epsilon) + \frac{1}{2}\not{\epsilon}\not{k}\right)\gamma_\alpha\,(C_V - C_A\gamma_5) - \gamma_\alpha\,(C_V - C_A\gamma_5)\,\gamma\left((p_2 \cdot \epsilon) + \frac{1}{2}\not{\epsilon}\not{k}\right)\right\}u(p_2)\right.\\ &\left.\cdot\bar{u}\,(p_2)\left\{\gamma_\beta\,(C_V - C_A\gamma_5)\,\beta\left((p_1 \cdot \epsilon) + \frac{1}{2}\not{k}\not{\epsilon}\right) - \gamma\left((p_2 \cdot \epsilon) + \frac{1}{2}k\epsilon\right)\gamma_\beta\,(C_V - C_A\gamma_5)\right\}u(p_1)\right]\end{aligned} \tag{A.25}$$

この $E_{\alpha\beta}$ の計算を行う。以下では、p_1 の静止座標で考える。また、横軸光子を考えているので、$(p_1 \cdot \epsilon) = 0$ が成立する。

1. β^2 の項

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left[\left((p_1 \cdot \epsilon) + \frac{1}{2}\not{\epsilon}\not{k}\right)\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(p_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)\left((p_1 \cdot \epsilon) + \frac{1}{2}\not{k}\not{\epsilon}\right)(\not{p}_1 + m)\right]\\ =&(p_1 \cdot \epsilon)^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1 + m)\right]\\ &+ \frac{1}{2}(p_1 \cdot \epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)\not{k}\not{\epsilon}(\not{p}_1 + m)\right]\\ &+ \frac{1}{2}(p_1 \cdot \epsilon)\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1 + m)\right]\\ &+ \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)\not{k}\not{\epsilon}(\not{p}_1 + m)\right]\end{aligned} \tag{A.26}$$

$(p_1 \cdot \epsilon) = 0$ であるから、式 (A.26) の第 1 項から第 3 項までは 0 である。そして、式 (A.26) の最後の項は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)\not{k}\not{\epsilon}(\not{p}_1 + m)\right]\\ =&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)\not{k}(\not{p}_1 - m)\right]\\ =&\frac{1}{4}(C_V^2 + C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{k}\not{p}_1\right] - \frac{1}{4}m^2(C_V^2 - C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma_\alpha\gamma_\beta\not{k}\right]\\ =&\frac{1}{4}(C_V^2 + C_A^2)\mathrm{Tr}\left[2(p_1 \cdot k)\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{k} - \omega_0^2\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right] - \frac{1}{4}m^2\omega_0^2(C_V^2 - C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\right]\\ =&(C_V^2 + C_A^2)\left\{2(p_1 \cdot k)[p_{2\alpha}k_\beta + p_{2\beta}k_\alpha - g_{\alpha\beta}(p_2 \cdot k)] - \omega_0^2[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1 \cdot p_2)]\right\}\\ &- m^2\omega_0^2(C_V^2 - C_A^2)g_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{A.27}$$

式 (A.27) で、パリティ非保存の過程の寄与はないので、$C_V C_A$ の項は落としてある。以下でもすべて同様である。

2. $-\beta\gamma$ の項

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\left((p_1\cdot\epsilon)+\frac{1}{2}\not{\epsilon}\not{k}\right)\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\left((p_2\cdot\epsilon)+\frac{1}{2}\not{k}\not{\epsilon}\right)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)\left(\not{p}_1+m\right)\right]\\
=&(p_1\cdot\epsilon)(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{2}(p_1\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(p_1+m)\right]
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

$(p_1\cdot\epsilon)=0$ であるから、式 (A.28) の第 1 項と第 2 項は 0 である。ここで、式 (A.28) の第 3 項は以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
=&\frac{1}{2}\left(p_2\cdot\epsilon\right)\left(C_V^2+C_A^2\right)\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]+\frac{1}{2}m^2\left(p_2\cdot\epsilon\right)\left(C_V^2-C_A^2\right)\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha\gamma_\beta\right]\\
=&2\left(C_V^2+C_A^2\right)\left\{(p_2\cdot\epsilon)^2\left[k_\alpha p_{1\beta}-k_\beta p_{1\alpha}+g_{\alpha\beta}(p_1\cdot k)\right]\right.\\
&+(p_2\cdot\epsilon)(p_1\cdot p_2)(\epsilon_\alpha k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha)-(p_2\cdot\epsilon)(k\cdot p_2)(\epsilon_\alpha p_{1\beta}-\epsilon_\beta p_{1\alpha})\\
&\left.-(p_2\cdot\epsilon)(k\cdot p_1)(\epsilon_\alpha p_{2\beta}+\epsilon_\beta p_{2\alpha})\right\}+2m^2(p_2\cdot\epsilon)(C_V^2-C_A^2)(k_\alpha\epsilon_\beta-k_\beta\epsilon_\alpha)
\end{aligned}
\tag{A.29}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\
=&-2\epsilon_\beta\mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\not{\epsilon}\not{p}_1\right]-\mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\
=&-2\epsilon_\beta\left\{2k_\alpha\mathrm{Tr}\left[\not{p}_2\not{k}\not{\epsilon}\not{p}_1\right]-2(k\cdot p_2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{k}\not{\epsilon}\not{p}_1\right]+\omega_0^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\not{\epsilon}\not{p}_1\right]\right\}\\
&-2k_\alpha\mathrm{Tr}\left[p_2k\gamma_\beta p_1\right]+2(k\cdot p_2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha k\gamma_\beta p_1\right]-\omega_0^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha p_2\gamma_\beta p_1\right]\\
=&-16\epsilon_\beta k_\alpha\left\{(p_2\cdot k)(\epsilon\cdot p_1)+(k\cdot\epsilon)(p_2\cdot p_1)-(p_2\cdot\epsilon)(k\cdot p_1)\right\}+16\epsilon_\beta(k\cdot p_2)\left\{k_\alpha(\epsilon\cdot p_1)+p_{1\alpha}(k\cdot\epsilon)-\epsilon_\alpha(k\cdot p_1)\right\}\\
&-8\omega_0^2\epsilon_\beta\left\{p_{2\alpha}(\epsilon\cdot p_1)+p_{1\alpha}(\epsilon\cdot p_2)-\epsilon_\alpha(p_1\cdot p_2)\right\}-8k_\alpha\left\{(p_2\cdot k)p_{1\beta}+k_\beta(p_1\cdot p_2)-p_{2\beta}(k\cdot p_1)\right\}\\
&+8(k\cdot p_2)\left\{k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right\}-4\omega_0^2\left\{p_{1\alpha}p_{2\beta}+p_{1\beta}p_{2\alpha}-g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right\}\\
=&16\epsilon_\beta k_\alpha(p_2\cdot\epsilon)(k\cdot p_1)-16\epsilon_\alpha\epsilon_\beta(k\cdot p_2)(k\cdot p_1)-8\omega_0^2(\epsilon\cdot p_2)p_{1\alpha}\epsilon_\beta+8\omega_0^2(p_1\cdot p_2)\epsilon_\alpha\epsilon_\beta\\
&-8k_\alpha p_{1\beta}(p_2\cdot k)-8k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2)+8k_\alpha p_{2\beta}(k\cdot p_1)+8(k\cdot p_2)\left\{k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right\}\\
&-4\omega_0^2\left\{p_{1\alpha}p_{2\beta}+p_{1\beta}p_{2\alpha}-g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right\}
\end{aligned}
\tag{A.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\right]&=2k_\alpha\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\right]-\omega_0^2\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\gamma_\alpha\not{\epsilon}\gamma_\beta\right]\\
&=8k_\alpha\left\{(\epsilon\cdot k)\epsilon_\beta+(\epsilon\cdot k)\epsilon_\beta-k_\beta\epsilon^2\right\}-4\omega_0^2\left\{\epsilon_\alpha\epsilon_\beta+\epsilon_\beta\epsilon_\alpha-g_{\alpha\beta}\epsilon^2\right\}\\
&=8k_\alpha k_\beta-4\omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta+g_{\alpha\beta})
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

より、式 (A.28) の最後の項は以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
=&\frac{1}{4}(C_V^2+C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\not{p}_1\right]+\frac{1}{4}m^2(C_V^2-C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\alpha\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\right]\\
=&(C_V^2+C_A^2)\left\{4\epsilon_\beta k_\alpha(p_2\cdot\epsilon)(k\cdot p_1)-2\omega_0^2p_{1\alpha}\epsilon_\beta(p_2\cdot\epsilon)-2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta\left[2(k\cdot p_2)(k\cdot p_1)-\omega_0^2(p_1\cdot p_2)\right]\right.\\
&-2k_\alpha p_{1\beta}(p_2\cdot k)-2k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2)+2k_\alpha p_{2\beta}(k\cdot p_1)+2(p_2\cdot k)\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right]\\
&\left.-\omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta}+p_{1\beta}p_{2\alpha}-g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right]\right\}+m^2(C_V^2-C_A^2)\left\{2k_\alpha k_\beta-\omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta+g_{\alpha\beta})\right\}\\
=&(C_V^2+C_A^2)\left\{4\epsilon_\beta k_\alpha(k\cdot p_1)(\epsilon\cdot p_2)-2\omega_0^2p_{1\alpha}\epsilon_\beta(\epsilon\cdot p_2)-2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta\left[2(k\cdot p_2)(k\cdot p_1)-\omega_0^2(p_1\cdot p_2)\right]\right.\\
&+2k_\beta p_{1\alpha}(p_2\cdot k)+2k_\alpha p_{2\beta}(k\cdot p_1)-2k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2)-2g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)(k\cdot p_2)\\
&\left.-\omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta}+p_{1\beta}p_{2\alpha}-g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right]\right\}+m^2(C_V^2-C_A^2)\left\{2k_\alpha k_\beta-\omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta+g_{\alpha\beta})\right\}
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

3. $-\gamma\beta$ の項

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)\left((p_2\cdot\epsilon)+\frac{1}{2}\not{\epsilon}\not{k}\right)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)\left((p_1\cdot\epsilon)+\frac{1}{2}\not{k}\not{\epsilon}\right)(\not{p}_1+m)\right]\\
=&(p_1\cdot\epsilon)(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{2}(p_1\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)\not{\epsilon}\not{k}(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)\not{k}\not{\epsilon}(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)\not{\epsilon}\not{k}(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)\not{k}\not{\epsilon}(\not{p}_1+m)\right]
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

$(p_1\cdot\epsilon)=0$ であるから、式 (A.33) の第 1 項と第 2 項は 0 である。ここで、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{k}\not{\epsilon}\not{p}_1\right]\\
=&(\epsilon\cdot p_1)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{k}\right]-\epsilon_\alpha\mathrm{Tr}\left[\not{p}_2\gamma_\beta\not{k}\not{p}_1\right]+(\epsilon\cdot p_2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\not{k}\not{p}_1\right]-\epsilon_\beta\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\not{p}_1\right]+(\epsilon\cdot k)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\
=&4(p_2\cdot\epsilon)\left[p_{1\alpha}k_\beta-p_{1\beta}k_\alpha+g_{\alpha\beta}(p_1\cdot k)\right]-4\epsilon_\alpha\left[p_{2\beta}(k\cdot p_1)+k_\beta(p_1\cdot p_2)-p_{1\beta}(k\cdot p_2)\right]\\
&-4\epsilon_\beta\left[p_{2\alpha}(k\cdot p_1)-k_\alpha(p_1\cdot p_2)+p_{1\alpha}(k\cdot p_2)\right]\\
=&4(p_2\cdot\epsilon)\left[p_{1\alpha}k_\beta-p_{1\beta}k_\alpha+g_{\alpha\beta}(p_1\cdot k)\right]-4(k\cdot p_1)(\epsilon_\alpha p_{2\beta}+\epsilon_\beta p_{2\alpha})\\
&-4(p_1\cdot p_2)(\epsilon_\alpha k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha)+4(k\cdot p_2)(\epsilon_\alpha p_{1\beta}-\epsilon_\beta p_{1\alpha})
\end{aligned}
\tag{A.34}
$$

より、式 (A.33) の第 3 の項は以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)\not{k}\not{\epsilon}(\not{p}_1+m)\right]\\
=&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)(C_V^2+C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{k}\not{\epsilon}\not{p}_1\right]+\frac{1}{2}m^2(p_2\cdot\epsilon)(C_V^2-C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\not{k}\not{\epsilon}\right]\\
=&2(C_V^2+C_A^2)\left\{(p_2\cdot\epsilon)^2\left[p_{1\alpha}k_\beta-p_{1\beta}k_\alpha+g_{\alpha\beta}(p_1\cdot k)\right]-(p_2\cdot\epsilon)(k\cdot p_1)(\epsilon_\alpha p_{2\beta}+\epsilon_\beta p_{2\alpha})\right.\\
&\left.-(p_2\cdot\epsilon)(p_1\cdot p_2)(\epsilon_\alpha k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha)+(p_2\cdot\epsilon)(p_2\cdot k)(\epsilon_\alpha p_{1\beta}-\epsilon_\beta p_{1\alpha})\right\}\\
&+2m^2(p_2\cdot\epsilon)(C_V^2-C_A^2)(\epsilon_\alpha k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha)
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \not k \not p_2 \gamma_\beta \not k \not\epsilon \not p_1\right] \\
=&2(p_2\cdot k)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \gamma_\beta \not k \not\epsilon \not p_1\right] - 2k_\beta \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \not p_2 \not k \not\epsilon \not p_1\right] + \omega_0^2 \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \not p_2 \gamma_\beta \not\epsilon \not p_1\right] \\
=&2(p_2\cdot k)\left\{-2\epsilon_\alpha \mathrm{Tr}\left[\not\epsilon \gamma_\beta \not k \not p_1\right] - \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \gamma_\beta \not k \not p_1\right]\right\} - 2k_\beta\left\{-2\epsilon_\alpha \mathrm{Tr}\left[\not\epsilon \not p_2 \not k \not p_1\right] - \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not p_2 \not k \not p_1\right]\right\} \\
&+\omega_0^2\left\{-2\epsilon_\alpha \mathrm{Tr}\left[\not\epsilon \not p_2 \gamma_\beta \not p_1\right] - \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not p_2 \gamma_\beta \not p_1\right]\right\} \\
=&-16(p_2\cdot k)\epsilon_\alpha\epsilon_\beta(k\cdot p_1) - 8(p_2\cdot k)\left[p_{1\alpha}k_\beta - p_{1\beta}k_\alpha + g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right] \\
&+16\epsilon_\alpha k_\beta(\epsilon\cdot p_2)(k\cdot p_1) + 8k_\beta\left[p_{2\alpha}(k\cdot p_1) + p_{1\alpha}(k\cdot p_2) - k_\alpha(p_1\cdot p_2)\right] \\
&-8\omega_0^2\epsilon_\alpha\left[p_{1\beta}(\epsilon\cdot p_2) - \epsilon_\beta(p_1\cdot p_2)\right] - 4\omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right] \\
=&-16\epsilon_\alpha\epsilon_\beta(k\cdot p_1)(p_2\cdot k) + 16\epsilon_\alpha k_\beta(k\cdot p_1)(\epsilon\cdot p_2) - 8(p_2\cdot k)\left[p_{1\alpha}k_\beta - p_{1\beta}k_\alpha + g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right] \\
&+8p_{2\alpha}k_\beta(k\cdot p_1) + 8p_{1\alpha}k_\beta(k\cdot p_2) - 8k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2) - 8\omega_0^2\left[\epsilon_\alpha p_{1\beta}(\epsilon\cdot p_2) - \epsilon_\alpha\epsilon_\beta(p_1\cdot p_2)\right] \\
&-4\omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right]
\end{aligned} \tag{A.36}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \not k \gamma_\beta \not k \not\epsilon\right] \\
=&\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not k \not\epsilon \gamma_\beta \not\epsilon \not k\right] \\
=&2k_\alpha \mathrm{Tr}\left[\not k \not\epsilon \gamma_\beta \not\epsilon\right] - \omega_0^2 \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \gamma_\beta \not\epsilon\right] \\
=&8k_\alpha\left[(k\cdot\epsilon)\epsilon_\beta + \epsilon_\beta(k\cdot\epsilon) - k_\beta\epsilon^2\right] - 4\omega_0^2(\epsilon_\alpha\epsilon_\beta + \epsilon_\alpha\epsilon_\beta - g_{\alpha\beta}\epsilon^2) \\
=&8k_\alpha k_\beta - 4\omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta + g_{\alpha\beta})
\end{aligned} \tag{A.37}
$$

より、式 (A.33) の最後の項は次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)\not\epsilon \not k(\not p_2 + m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)\not k \not\epsilon(\not p_1 + m)\right] \\
=&\frac{1}{4}(C_V^2 + C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \not k \not p_2 \gamma_\beta \not k \not\epsilon \not p_1\right] + \frac{1}{4}m^2(C_V^2 - C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not\epsilon \not k \gamma_\beta \not k \not\epsilon\right] \\
=&(C_V^2 + C_A^2)\Big\{4\epsilon_\alpha k_\beta(k\cdot p_1)(\epsilon_2\cdot p_2) - 2\omega_0^2\epsilon_\alpha p_{1\beta}(\epsilon\cdot p_2) - 2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta\left[2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2) - \omega_0^2(p_1\cdot p_2)\right] \\
&+2p_{1\alpha}k_\beta(p_2\cdot k) - 2k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2) + 2p_{2\alpha}k_\beta(k\cdot p_1) - 2(p_2\cdot k)\left[p_{1\alpha}k_\beta - p_{1\beta}k_\alpha + g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right] \\
&-\omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right]\Big\} + (C_V^2 - C_A^2)m^2\left\{2k_\alpha k_\beta - \omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta + g_{\alpha\beta})\right\} \\
=&(C_V^2 + C_A^2)\Big\{4\epsilon_\alpha k_\beta(k\cdot p_1)(\epsilon_2\cdot p_2) - 2\omega_0^2\epsilon_\alpha p_{1\beta}(\epsilon\cdot p_2) - 2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta\left[2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2) - \omega_0^2(p_1\cdot p_2)\right] \\
&+2k_\alpha p_{1\beta}(p_2\cdot k) + 2p_{2\alpha}k_\beta(k\cdot p_1) - 2k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2) - 2g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)(k\cdot p_2) \\
&-\omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right]\Big\} + m^2(C_V^2 - C_A^2)\left\{2k_\alpha k_\beta - \omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta + g_{\alpha\beta})\right\}
\end{aligned} \tag{A.38}
$$

以上より、$-(\beta\gamma + \gamma\beta)$ の項は次のように書くことができる。

$$
\begin{aligned}
&-(\beta\gamma + \gamma\beta)term \\
=&2(C_V^2 + C_A^2)\Big\{2g_{\alpha\beta}(p_1\cdot k)(\epsilon\cdot p_2)^2 - 2(\epsilon_\alpha p_{2\beta} + \epsilon_\beta p_{2\alpha})(p_1\cdot k)(\epsilon\cdot p_2) + 2(\epsilon_\alpha k_\beta + \epsilon_\beta k_\alpha)(k\cdot p_1)(\epsilon\cdot p_2) \\
&-\omega_0^2(\epsilon_\alpha p_{1\beta} + \epsilon_\beta p_{1\alpha})(\epsilon\cdot p_2) - 2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta\left[2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2) - \omega_0^2(p_1\cdot p_2)\right] + (p_{1\alpha}k_\beta + p_{1\beta}k_\alpha)(p_2\cdot k) \\
&+(p_{2\alpha}k_\beta + p_{2\beta}k_\alpha)(k\cdot p_1) - 2k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2) - 2g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)(k\cdot p_2) - \omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right] \\
&+2m^2(C_V^2 - C_A^2)\left\{2k_\alpha k_\beta - \omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta + g_{\alpha\beta})\right\}
\end{aligned} \tag{A.39}
$$

4. γ^2 の項

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)\left((p_2\cdot\epsilon)+\frac{1}{2}\not{\epsilon}\not{k}\right)(\not{p}_2+m)\left((p_2\cdot\epsilon)+\frac{1}{2}\not{k}\not{\epsilon}\right)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
=&(p_2\cdot\epsilon)^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)\not{\epsilon}\not{k}(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
&+\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)\not{\epsilon}\not{k}(\not{p}_2+m)\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]
\end{aligned}
\tag{A.40}
$$

式 (A.40) の第 1 項は次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&(p_2\cdot\epsilon)^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\
=&(p_2\cdot\epsilon)^2(C_V^2+C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]+m^2(C_V^2-C_A^2)(p_2\cdot\epsilon)^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\right]\\
=&4(p_2\cdot\epsilon)^2(C_V^2+C_A^2)\left[p_{1\alpha}p_{2\beta}+p_{1\beta}p_{2\alpha}-g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right]+4m^2(p_2\cdot\epsilon)^2(C_V^2-C_A^2)g_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{A.41}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\not{p}_1\right]=&\epsilon_\beta\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\not{p}_1\right]-(\epsilon\cdot p_1)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\not{k}\gamma_\beta\right]+\epsilon_\alpha\mathrm{Tr}\left[\not{p}_2\not{k}\gamma_\beta\not{p}_1\right]-(\epsilon\cdot p_2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{k}\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\
&+(\epsilon\cdot k)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\
=&4\epsilon_\beta\left[p_{2\alpha}(k\cdot p_1)+p_{1\alpha}(k\cdot p_2)-k_\alpha(p_1\cdot p_2)\right]+4\epsilon_\alpha\left[-p_{2\beta}(k\cdot p_1)+p_{1\beta}(k\cdot p_2)+k_\beta(p_1\cdot p_2)\right]\\
&-4(\epsilon\cdot p_2)\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right]\\
=&4(p_{2\alpha}\epsilon_\beta-p_{2\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_1)+4(p_{1\alpha}\epsilon_\beta+p_{1\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_2)\\
&+4(\epsilon_{2\alpha}k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha)(p_1\cdot p_2)-4(\epsilon\cdot p_2)\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right]
\end{aligned}
\tag{A.42}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\right]=&4\left[k_\alpha\epsilon_\beta-\epsilon_\alpha k_\beta+g_{\alpha\beta}(k\cdot\epsilon)\right]\\
=&4(k_\alpha\epsilon_\beta-k_\beta\epsilon_\alpha)
\end{aligned}
\tag{A.43}
$$

より、式 (A.40) の第 2 項は次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\\
=&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)(C_V^2-C_A^2)\mathrm{Tr}\gamma_\alpha p_2 k\epsilon\gamma_\beta p_1+\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)m^2(C_V^2-C_A^2)\mathrm{Tr}\gamma_\alpha k\epsilon\gamma_\beta\\
=&2(C_V^2+C_A^2)\left\{(p_{2\alpha}\epsilon_\beta-p_{2\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_1)(\epsilon\cdot p_2)+(p_{1\alpha}\epsilon_\beta+p_{1\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_2)(\epsilon\cdot p_2)\right.\\
&\left.+(\epsilon_\alpha k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha)(p_1\cdot p_2)(\epsilon\cdot p_2)-\left(k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right)(\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\\
&+2m^2(C_V^2-C_A^2)(k_\alpha\epsilon_\beta-k_\beta\epsilon_\alpha)(\epsilon\cdot p_2)
\end{aligned}
\tag{A.44}
$$

さらに、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha \not{\epsilon}\not{k}\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right] =&(\epsilon\cdot k)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]-(\epsilon\cdot p_2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{k}\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\ &+\epsilon_\beta\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{k}\not{p}_2\not{p}_1\right]-(\epsilon\cdot p_1)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{k}\not{p}_2\gamma_\beta\right]+\epsilon_\alpha\mathrm{Tr}\left[\not{k}\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\ =&-4(\epsilon\cdot p_2)\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right]+4\epsilon_\beta\left[k_\alpha(p_1\cdot p_2)+p_{1\alpha}(k\cdot p_2)-p_{2\alpha}(k\cdot p_1)\right]\\ &+4\epsilon_\alpha\left[-k_\beta(p_1\cdot p_2)+p_{1\beta}(k\cdot p_2)+p_{2\beta}(k\cdot p_1)\right]\\ =&-4(\epsilon\cdot p_2)\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right]+4(k_\alpha\epsilon_\beta-k_\beta\epsilon_\alpha)(p_1\cdot p_2)\\ &+4(\epsilon_\alpha p_{1\beta}+\epsilon_\beta p_{1\alpha})(k\cdot p_2)+4(\epsilon_\alpha p_{2\beta}-\epsilon_\beta p_{2\alpha})(k\cdot p_1)\end{aligned} \tag{A.45}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\beta\right]=4(\epsilon_\alpha k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha) \tag{A.46}$$

より、式 (A.40) の第 3 項は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)\not{\epsilon}\not{k}(\not{p}_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\ =&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)(C_V^2+C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\not{k}\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]+\frac{1}{2}m^2(p_2\cdot\epsilon)(C_V^2-C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\not{k}\gamma_\beta\right]\\ =&2(C_V^2+C_A^2)\left\{-(p_{2\alpha}\epsilon_\beta-p_{2\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_1)(\epsilon\cdot p_2)+(p_{1\alpha}\epsilon_\beta+p_{1\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_2)(\epsilon\cdot p_2)\right.\\ &\left.-(\epsilon_\alpha k_\beta-\epsilon_\beta k_\alpha)(p_1\cdot p_2)(\epsilon\cdot p_2)-\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right](\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\\ &-2m^2(C_V^2-C_A^2)(k_\alpha\epsilon_\beta-k_\beta\epsilon_\alpha)(\epsilon\cdot p_2)\end{aligned} \tag{A.47}$$

そして、式 (A.40) の第 2 項と第 3 項をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_2+m)\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\ &+\frac{1}{2}(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)\not{\epsilon}\not{k}(p_2+m)\gamma_\beta(C_V-C_A\gamma_5)(\not{p}_1+m)\right]\\ =&4(C_V^2+C_A^2)\left\{(p_{1\alpha}\epsilon_\beta+p_{1\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_2)(\epsilon\cdot p_2)-\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right](\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\end{aligned} \tag{A.48}$$

また、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\not{k}\not{p}_2\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\ =&2(k\cdot p_2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\not{p}_1\right]-\omega_0^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\not{p}_2\not{\epsilon}\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\ =&2(k\cdot p_2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{k}\gamma_\beta\not{p}_1\right]-2\omega_0^2(p_2\cdot\epsilon)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\gamma_\beta\not{p}_1\right]-\omega_0^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{p}_2\gamma_\beta\not{p}_1\right]\\ =&8(k\cdot p_2)\left[k_\alpha p_{1\beta}+k_\beta p_{1\alpha}-g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right]-8\omega_0^2(p_2\cdot\epsilon)(\epsilon_\alpha p_{1\beta}+\epsilon_\beta p_{1\alpha})-4\omega_0^2(p_{1\alpha}p_{2\beta}+p_{1\beta}p_{2\alpha}\\ &-g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2))\end{aligned} \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not{\epsilon}\not{k}\not{k}\not{\epsilon}\gamma_\beta\right]=&-\omega_0^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\right]\\ =&-4\omega_0^2 g_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{A.50}$$

より、式 (A.40) の最後の項は次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha(C_V - C_A\gamma_5)\not\epsilon\not k(\not p_2 + m)\not k\not\epsilon\gamma_\beta(C_V - C_A\gamma_5)(\not p_1 + m)\right] \\
=&\frac{1}{4}(C_V^2 + C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not\epsilon\not k\not p_2\not k\not\epsilon\gamma_\beta\not p_1\right] + \frac{1}{4}m^2(C_V^2 - C_A^2)\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\not\epsilon\not k\not k\not\epsilon\gamma_\beta\right] \\
=&(C_V^2 + C_A^2)\left\{2(k\cdot p_2)\left[k_\alpha p_{1\beta} + k_\beta p_{1\alpha} - g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)\right] - 2\omega_0^2(p_2\cdot\epsilon)(\epsilon_\alpha p_{1\beta} + \epsilon_\beta p_{1\alpha})\right. \\
&\left.-\omega_0^2\left[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2)\right]\right\} - m^2\omega_0^2(C_V^2 - C_A^2)g_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{A.51}
$$

以上によりすべての項をまとめると、

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha\beta} =&\beta^2\left\{(C_V^2 + C_A^2)\left[2(p_1\cdot k)(p_{2\alpha}k_\beta + p_{2\beta}k_\alpha - g_{\alpha\beta}(p_2\cdot k))\right.\right. \\
&\left.\left.-\omega_0^2(p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2))\right] - m^2\omega_0^2(C_V^2 - C_A^2)g_{\alpha\beta}\right\} \\
&- 2\beta\gamma\left\{(C_V^2 + C_A^2)\left[2g_{\alpha\beta}(p_1\cdot k)(\epsilon\cdot p_2)^2 - 2(\epsilon_\alpha p_{2\beta} + \epsilon_\beta p_{2\alpha})(p_1\cdot k)(\epsilon\cdot p_2)\right.\right. \\
&+ 2(\epsilon_\alpha k_\beta + \epsilon_\beta k_\alpha)(p_1\cdot k)(\epsilon\cdot p_2) - \omega_0^2(\epsilon_\alpha p_{1\beta} + \epsilon_\beta p_{1\alpha})(\epsilon\cdot p_2) - 2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta(2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2) - \omega_0^2(p_1\cdot p_2)) \\
&+ (p_{1\alpha}k_\beta + p_{1\beta}k_\alpha)(p_2\cdot k) + (p_{2\alpha}k_\beta + p_{2\beta}k_\alpha)(k\cdot p_1) - 2k_\alpha k_\beta(p_1\cdot p_2) - 2g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1)(k\cdot p_2) \\
&\left.\left.-\omega_0^2(p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2))\right] + m^2(C_V^2 - C_A^2)\left[2k_\alpha k_\beta - \omega_0^2(2\epsilon_\alpha\epsilon_\beta + g_{\alpha\beta})\right]\right\} \\
&+ \gamma^2\left\{(C_V^2 + C_A^2)\left[4(p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2))(p_2\cdot\epsilon)^2\right.\right. \\
&+ 4(p_{1\alpha}\epsilon_\beta + p_{1\beta}\epsilon_\alpha)(k\cdot p_2)(\epsilon\cdot p_2) - 4(k_\alpha p_{1\beta} + k_\beta p_{1\alpha} - g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1))(p_2\cdot\epsilon)^2 \\
&+ 2(k_\alpha p_{1\beta} + k_\beta p_{1\alpha} - g_{\alpha\beta}(k\cdot p_1))(k\cdot p_2) - 2\omega_0^2(\epsilon_\alpha p_{1\beta} + \epsilon_\beta p_{1\alpha})(\epsilon\cdot p_2) \\
&\left.\left.-\omega_0^2(p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2))\right] + m^2(C_V^2 - C_A^2)\left[4g_{\alpha\beta}(p_2\cdot\epsilon)^2 - \omega_0^2 g_{\alpha\beta}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{A.52}
$$

次に、$E_{\alpha\beta}I^{\alpha\beta}$ を考える。ただし、$I^{\alpha\beta} = (Q^\alpha Q^\beta - g^{\alpha\beta}Q^2)$ である。

1. β^2 の項

$$
\begin{aligned}
&(C_V^2 + C_A^2)\left\{2(p_1\cdot k)\left[(p_2\cdot Q)(k\cdot Q) - (k\cdot p_2)Q^2 + (p_2\cdot Q)(k\cdot Q) - (k\cdot p_2)Q^2 - (k\cdot p_2)Q^2 + 4(k\cdot p_2)Q^2\right]\right. \\
&\left.-\omega_0^2\left[(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q) - (p_1\cdot p_2)Q^2 + (p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q) - (p_1\cdot p_2)Q^2 - (p_1\cdot p_2)Q^2 + 4(p_1\cdot p_2)Q^2\right]\right\} \\
&- m^2\omega_0^2(C_V^2 - C_A^2)(Q^2 - 4Q^2) \\
=&(C_V^2 + C_A^2)\left\{2(p_1\cdot k)\left[2(p_2\cdot Q)(k\cdot Q) + (k\cdot p_2)Q^2\right] - \omega_0^2\left[2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q) + (p_1\cdot p_2)Q^2\right]\right\} \\
&+ 3m^2\omega_0^2(C_V^2 - C_A^2)Q^2
\end{aligned} \tag{A.53}
$$

ここで、$(C_V^2 + C_A^2)$ の項を考える。

$$
\xi \equiv (p_1\cdot k) + \frac{1}{2}\omega_0^2 \tag{A.54}
$$

$$
\eta \equiv (p_2\cdot k) - \frac{1}{2}\omega_0^2 \tag{A.55}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^2 =&2m^2 + \omega_0^2 + 2(p_1\cdot k) - 2(p_1\cdot p_2) - 2(k\cdot p_2) \\
=&2m^2 + \omega_0^2 + 2\xi - \omega_0^2 - 2(p_1\cdot p_2) - (2\eta + \omega_0^2) \\
=&2m^2 + 2\xi - 2\eta - \omega_0^2 - 2(p_1\cdot p_2)
\end{aligned} \tag{A.56}
$$

$$(p_1 \cdot p_2) = m^2 + \xi - \eta - \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{1}{2}Q^2 \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}(p_2 \cdot Q) =&(p_1 \cdot p_2) + (k \cdot p_2) - m^2 \\ =&\xi - \eta - \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{1}{2}Q^2 + \eta + \frac{1}{2}\omega_0^2 \\ =&\xi - \frac{1}{2}Q^2\end{aligned} \tag{A.58}$$

$$\begin{aligned}(k \cdot Q) =&(k \cdot p_1) + \omega_0^2 - (k \cdot p_2) \\ =&\xi - \frac{1}{2}\omega_0^2 + \omega_0^2 - \eta - \frac{1}{2}\omega_0^2 \\ =&\xi - \eta\end{aligned} \tag{A.59}$$

$$\begin{aligned}(p_1 \cdot Q) =&m^2 + (p_1 \cdot k) - (p_1 \cdot p_2) \\ =&m^2 + \xi - \frac{1}{2}\omega_0^2 - m^2 - \xi + \eta + \frac{1}{2}\omega_0^2 + \frac{1}{2}Q^2 \\ =&\eta + \frac{1}{2}Q^2\end{aligned} \tag{A.60}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned}&2(p_1 \cdot k)\left[2(p_2 \cdot Q)(k \cdot Q) + (k \cdot p_2)Q^2\right] \\ =&(2\xi - \omega_0^2)\left[(2\xi - Q^2)(\xi - \eta) + \left(\eta + \frac{1}{2}\omega_0^2\right)Q^2\right] \\ =&(2\xi - \omega_0^2)\left[2\xi(\xi - \eta) - Q^2(\xi - \eta) + \eta Q^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 Q^2\right] \\ =&(2\xi - \omega_0^2)\left[\xi(2\xi - 2\eta - Q^2) + 2\eta Q^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 Q^2\right] \\ =&2\xi^2(2\xi - 2\eta - Q^2) + 4\xi\eta Q^2 + \omega_0^2\xi Q^2 - \omega_0^2\xi(2\xi - 2\eta - Q^2) - 2\eta\omega_0^2 Q^2 - \frac{1}{2}\omega_0^4 Q^2 \\ =&2\xi^2(2\xi - 2\eta - Q^2 - \omega_0^2) + 4\xi\eta Q^2 + \omega_0^2\xi Q^2 + \omega_0^2\xi(2\eta + Q^2) - 2\eta\omega_0^2 Q^2 - \frac{1}{2}\omega_0^4 Q^2 \\ =&2\xi^2(2\xi - 2\eta - Q^2 - \omega_0^2) + 2\xi\eta(2Q^2 + \omega_0^2) + 2\xi\omega_0^2 Q^2 - 2\eta\omega_0^2 Q^2 - \frac{1}{2}\omega_0^4 Q^2\end{aligned} \tag{A.61}$$

$$\begin{aligned}&2(p_1 \cdot Q)(p_2 \cdot Q) + (p_1 \cdot p_2)Q^2 \\ =&2\left(\eta + \frac{1}{2}Q^2\right)\left(\xi - \frac{1}{2}Q^2\right) + \left(m^2 + \xi - \eta - \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{1}{2}Q^2\right)Q^2 \\ =&2\eta\xi + (\xi - \eta)Q^2 - \frac{1}{2}Q^4 + \left(m^2 + \xi - \eta - \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{1}{2}Q^2\right)Q^2 \\ =&2\eta\xi + 2(\xi - \eta)Q^2 - Q^4 + m^2 Q^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 Q^2\end{aligned} \tag{A.62}$$

$$
\begin{aligned}
&-\omega_0^2\left[2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)+(p_1\cdot p_2)Q^2\right]\\
=&-2\xi\eta\omega_0^2-2(\xi-\eta)\omega_0^2Q^2+\omega_0^2Q^4-\omega_0^2m^2Q^2+\frac{1}{2}\omega_0^4Q^2
\end{aligned}
\tag{A.63}
$$

$$
\begin{aligned}
&2(p_1\cdot k)\left[2(p_2\cdot Q)(k\cdot Q)+(k\cdot p_2)Q^2\right]-\omega_0^2\left[2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)+(p_1\cdot p_2)Q^2\right]\\
=&2\xi^2(2\xi-2\eta-Q^2-\omega_0^2)+4\xi\eta Q^2+2\xi\eta\omega_0^2+2(\xi-\eta)\omega_0^2Q^2-\frac{1}{2}\omega_0^4Q^2\\
&-\xi\eta\omega_0^2-2(\xi-\eta)\omega_0^2Q^2+\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2+\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)\\
=&2\xi^2(2\xi-2\eta-Q^2-\omega_0^2)+4\xi\eta Q^2+\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)\\
=&2\beta^{-2}\left[2(\beta^{-1}-\gamma^{-1})-Q^2-\omega_0^2\right]+4\beta^{-1}\gamma^{-1}Q^2+\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)
\end{aligned}
\tag{A.64}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\beta^2\ term\\
=&(C_V^2+C_A^2)\left[4(\beta^{-1}-\gamma^{-1})-2(Q^2+\omega_0^2)+4\beta\gamma^{-1}Q^2+\beta^2\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)\right]+3m^2(C_V^2-C_A^2)\omega_0^2Q^2\beta^2
\end{aligned}
\tag{A.65}
$$

2. $-2\beta\gamma$ の項

$$
\begin{aligned}
&2\epsilon^2\left[2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2)-\omega_0^2(p_1\cdot p_2)\right]Q^2+\left[2(p_1\cdot Q)(k\cdot Q)-2Q^2(p_1\cdot k)\right](p_2\cdot k)\\
&+\left[2(p_2\cdot Q)(k\cdot Q)-2Q^2(k\cdot p_2)\right](k\cdot p_1)-2(k\cdot Q)^2(p_1\cdot p_2)+2\omega_0^2(p_1\cdot p_2)Q^2\\
&-2Q^2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2)+8Q^2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2)-\omega_0^2(2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)+(p_1\cdot p_2)Q^2)\\
=&-2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2)Q^2+3\omega_0^2Q^2(p_1\cdot p_2)+2(k\cdot p_2)(p_1\cdot Q)(k\cdot Q)+2(k\cdot p_1)(p_2\cdot Q)(k\cdot Q)\\
&-2(k\cdot Q)^2(p_1\cdot p_2)-2\omega_0^2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)\\
=&-2(\xi-\frac{1}{2}\omega_0^2)(\eta+\frac{1}{2}\omega_0^2)Q^2+3\omega_0^2Q^2\left(m^2+\xi-\eta-\frac{1}{2}\omega_0^2-\frac{1}{2}Q^2\right)\\
&+2(\xi-\eta)\left[\left(\eta+\frac{1}{2}\omega_0^2\right)\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)+\left(\xi-\frac{1}{2}\omega_0^2\right)\left(\xi-\frac{1}{2}Q^2\right)\right]\\
&-2(\xi-\eta)^2\left(m^2+\xi-\eta-\frac{1}{2}\omega_0^2-\frac{1}{2}Q^2\right)-2\omega_0^2\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)\left(\xi-\frac{1}{2}Q^2\right)\\
=&-2\xi\eta Q^2-\omega_0^2Q^2\xi+\omega_0^2Q^2\eta+\frac{1}{2}\omega_0^4Q^2+3m^2\omega_0^2Q^2+3\omega_0^2Q^2\xi-3\omega_0^2Q^2\eta-\frac{3}{2}\omega_0^4Q^2-\frac{3}{2}\omega_0^2Q^4\\
&+2(\xi-\eta)^3+4(\xi-\eta)\xi\eta-(Q^2+\omega_0^2)(\xi-\eta)^2+Q^2\omega_0^2(\xi-\eta)\\
&-2(\xi-\eta)^2m^2-2(\xi-\eta)^3+(\omega_0^2+Q^2)(\xi-\eta)^2-2\omega_0^2\xi\eta-\omega_0^2Q^2(\xi-\eta)+\frac{1}{2}\omega_0^2Q^4\\
=&-2(Q^2+\omega_0^2)\xi\eta+2\omega_0^2Q^2(\xi-\eta)-\omega_0^2Q^2(\omega_0^2+Q^2)+3m^2\omega_0^2Q^2+4(\xi-\eta)\xi\eta-2(\xi-\eta)^2m^2\\
=&-2(Q^2+\omega_0^2)\xi\eta+\omega_0^2Q^2\left[2(\xi-\eta)-\omega_0^2-Q^2+3m^2\right]+4(\xi-\eta)\xi\eta-2(\xi-\eta)^2m^2\\
=&-2(Q^2+\omega_0^2)\xi\eta+\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)-2\omega_0^2Q^2\left[Q^2-(\xi-\eta)-2m^2+\frac{1}{2}\omega_0^2\right]+4(\xi-\eta)\xi\eta-2(\xi-\eta)^2m^2
\end{aligned}
\tag{A.66}
$$

$$\xi = \beta^{-1} \tag{A.67}$$

$$\eta = \gamma^{-1} \tag{A.68}$$

ここで、$(C_V^2 + C_A^2)(\epsilon \cdot p_2)^2$ の項を考える。

$$\begin{aligned}
&-6Q^2(p_1 \cdot k) - 2(-2p_2 \cdot Q - 2Q^2)(p_1 \cdot k) + 2\left[-2(k \cdot Q)\right](p_1 \cdot k) + 2\omega_0^2(p_1 \cdot Q) \\
&-2\left[2(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) - \omega_0^2(p_1 \cdot p_2)\right] \\
=&-6Q^2(p_1 \cdot k) + 4(p_2 \cdot Q)(p_1 \cdot k) + 4(p_1 \cdot k)Q^2 - 4(k \cdot Q)(p_1 \cdot k) + 2\omega_0^2(p_1 \cdot Q) \\
&-4(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) + 2\omega_0^2(p_1 \cdot p_2) \\
=&-2Q^2\left(\xi - \frac{1}{2}\omega_0^2\right) + 4\left(\xi - \frac{1}{2}Q^2\right)\left(\xi - \frac{1}{2}\omega_0^2\right) - 4(\xi - \eta)\left(\xi - \frac{1}{2}\omega_0^2\right) \\
&+2\omega_0^2\left(\eta + \frac{1}{2}Q^2\right) - 4\left(\xi - \frac{1}{2}\omega_0^2\right)\left(\eta + \frac{1}{2}\omega_0^2\right) + 2\omega_0^2\left(m^2 + \xi - \eta - \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{1}{2}Q^2\right) \\
=&-2Q^2\xi + \omega_0^2 Q^2 + 4\xi^2 - 2Q^2\xi - 2\omega_0^2\xi + Q^2\omega_0^2 - 4\xi^2 + 2\xi\omega_0^2 + 4\xi\eta - 2\omega_0^2\eta \\
&+\omega_0^2 Q^2 - 2\xi\omega_0^2 - 4\xi\eta + 2\omega_0^2\eta + 2\omega_0^2\eta + \omega_0^4 + 2\omega_0^2 m^2 + 2\omega_0^2\xi - 2\omega_0^2\eta - \omega_0^4 - \omega_0^2 Q^2 \\
=&-4Q^2\xi + 2\omega_0^2 Q^2 + 2\omega_0^2 m^2 \\
=&-4Q^2\xi + 2\omega_0^2(Q^2 + m^2)
\end{aligned} \tag{A.69}$$

さらに、$m^2(C_V^2 - C_A^2)$ の項は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&2(k \cdot Q)^2 - 2\omega_0^2 Q^2 - \omega_0^2\left[2(\epsilon \cdot p_2)^2 + 2Q^2 + Q^2 - 4Q^2\right] \\
=&2(k \cdot Q)^2 - \omega_0^2 Q^2 - 2\omega_0^2(\epsilon \cdot p_2)^2
\end{aligned} \tag{A.70}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&-2\beta\gamma\, term \\
=&\Big\{-8(\beta^{-1} - \gamma^{-1}) + 4(Q^2 + \omega_0^2) - 2\beta\gamma\omega_0^2 Q^2(Q^2 - m^2) + 4\beta\gamma\omega_0^2 Q^2\left(Q^2 - (\xi - \eta) - 2m^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\right) \\
&+4\beta\gamma(\beta^{-1} - \gamma^{-1})^2 m^2 + (8\gamma Q^2 - 4\beta\gamma\omega_0^2(Q^2 + m^2))(\epsilon \cdot p_2)^2\Big\}(C_V^2 + C_A^2) \\
&+4\left\{-4\beta\gamma(k \cdot Q)^2 + 2\beta\gamma\omega_0^2 Q^2 + 4\beta\gamma\omega_0^2(\epsilon \cdot p_2)^2\right\}(C_V^2 - C_A^2)
\end{aligned} \tag{A.71}$$

3. γ^2 の項 $(C_V^2+C_A^2)$ の項

$$
\begin{aligned}
&2\left[2(k\cdot Q)(p_1\cdot Q)-2(k\cdot p_1)Q^2-(k\cdot p_1)Q^2+4(k\cdot p_1)Q^2\right](k\cdot p_2)-\omega_0^2\left[2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)+(p_1\cdot p_2)Q^2\right]\\
=&4(k\cdot Q)(p_1\cdot Q)(k\cdot p_2)+2(k\cdot p_1)(k\cdot p_2)Q^2-2\omega_0^2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)-\omega_0^2(p_1\cdot p_2)Q^2\\
=&4(\xi-\eta)\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)\left(\eta+\frac{1}{2}\omega_0^2\right)+2\left(\xi-\frac{1}{2}\omega_0^2\right)\left(\eta+\frac{1}{2}\omega_0^2\right)Q^2-2\omega_0^2\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)\left(\xi-\frac{1}{2}Q^2\right)\\
&-\omega_0^2\left(m^2+\xi-\eta-\frac{1}{2}\omega_0^2-\frac{1}{2}Q^2\right)Q^2\\
=&4\xi\eta^2+2(Q^2+\omega_0^2)\xi\eta+Q^2\omega_0^2\xi-4\eta^3-2(Q^2+\omega_0^2)\eta^2-Q^2\omega_0^2\eta+2\xi\eta Q^2\\
&+\omega_0^2Q^2\xi-\omega_0^2Q^2\eta-\frac{1}{2}\omega_0^4Q^2-2\omega_0^2\xi\eta-\xi\omega_0^2Q^2+\omega_0^2Q^2\eta+\frac{1}{2}\omega_0^2Q^4\\
&-\omega_0^2m^2Q^2-\omega_0^2Q^2\xi+\omega_0^2Q^2\eta+\frac{1}{2}\omega_0^4Q^2+\frac{1}{2}\omega_0^2Q^4\\
=&4\xi\eta^2+4Q^2\xi\eta-4\eta^3-2(Q^2+\omega_0^2)\eta^2-\omega_0^2m^2Q^2+\omega_0^2Q^4\\
=&\gamma^{-2}\left[4\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)-2(Q^2+\omega_0^2)+4\gamma\beta^{-1}Q^2\right]+\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)
\end{aligned}
\tag{A.72}
$$

$(C_V^2+C_A^2)(\epsilon\cdot p_2)^2$ の項

$$
\begin{aligned}
&4\left[2(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)+(p_1\cdot p_2)Q^2\right]-8(p_1\cdot Q)(k\cdot p_2)-4\left[2(k\cdot Q)(p_1\cdot Q)+(k\cdot p_1)Q^2\right]+4\omega_0^2(p_1\cdot Q)\\
=&8(p_1\cdot Q)(p_2\cdot Q)+4(p_1\cdot p_2)Q^2-8(p_1\cdot Q)(k\cdot p_2)-8(k\cdot Q)(p_1\cdot Q)-4(k\cdot p_1)Q^2+4\omega_0^2(p_1\cdot Q)\\
=&8\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)\left(\xi-\frac{1}{2}Q^2\right)+4\left(m^2+\xi-\eta-\frac{1}{2}\omega_0^2-\frac{1}{2}Q^2\right)Q^2\\
&-8\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)\left(\eta+\frac{1}{2}\omega_0^2\right)-8(\xi-\eta)\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)-4\left(\xi-\frac{1}{2}\omega_0^2\right)Q^2+4\omega_0^2\left(\eta+\frac{1}{2}Q^2\right)\\
=&-8\eta Q^2-4Q^2(Q^2-m^2)
\end{aligned}
\tag{A.73}
$$

$m^2(C_V^2-C_A^2)$ の項

$$
\begin{aligned}
&3\omega_0^2Q^2+4(Q^2-4Q^2)(p_2\cdot\epsilon)^2\\
=&3\omega_0^2Q^2-12Q^2(p_2\cdot\epsilon)^2
\end{aligned}
\tag{A.74}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\gamma^2\,term\\
=&\left\{4\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)-2(Q^2+\omega_0^2)+4\beta^{-1}\gamma Q^2+\gamma^2\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)+\left[-8\gamma Q^2-4\gamma^2Q^2(Q^2-m^2)\right](\epsilon\cdot p_2)^2\right\}(C_V^2+C_A^2)\\
&+m^2(C_V^2-C_A^2)\gamma^2\left[3\omega_0^2Q^2-12Q^2(p_2\cdot\epsilon)^2\right]
\end{aligned}
\tag{A.75}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha\beta}I^{\alpha\beta} =&(C_V^2+C_A^2)\left\{4(\beta^{-1}-\gamma^{-1})-2(Q^2+\omega_0^2)+4\beta\gamma^{-1}Q^2+\beta^2\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)-8(\beta^{-1}-\gamma^{-1})\right.\\
&+4(Q^2+\omega_0^2)-2\beta\gamma\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)+4\beta\gamma\omega_0^2Q^2\left[Q^2-(\xi-\eta)-2m^2+\frac{1}{2}\omega_0^2\right]\\
&+4\beta\gamma(\beta^{-1}-\gamma^{-1})^2m^2+4(\beta^{-1}-\gamma^{-1})-2(Q^2+\omega_0^2)+4\beta^{-1}\gamma Q^2+\gamma^2\omega_0^2(Q^2-m^2)\\
&\left.+\left[8\gamma Q^2-4\beta\gamma\omega_0^2(Q^2+m^2)-8\gamma Q^2-4\gamma^2Q^2(Q^2-m^2)\right](\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\\
&+m^2(C_V^2-C_A^2)\left\{3\beta^2\omega_0^2Q^2+2\beta\gamma\omega_0^2Q^2-4\beta\gamma(k\cdot Q)^2+3\gamma^2\omega_0^2Q^2-4\left(3\gamma^2Q^2-\beta\gamma\omega_0^2\right)(\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\\
=&(C_V^2+C_A^2)\left\{8Q^2+4\beta\gamma(\beta^{-1}-\gamma^{-1})^2(Q^2+m^2)+4\beta\gamma\omega_0^2Q^2\left[Q^2-2m^2-(\xi-\eta)+\frac{1}{2}\omega_0^2\right]\right.\\
&\left.+(\beta-\gamma)^2\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)-4\left[\gamma^2Q^2(Q^2-m^2)+\beta\gamma\omega_0^2(Q^2+m^2)\right](\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\\
&+m^2(C_V^2-C_A^2)\left\{(3\beta^2+2\beta\gamma+3\gamma^2)\omega_0^2Q^2-4\beta\gamma(k\cdot Q)^2-4\left[3\gamma^2Q^2-\beta\gamma\omega_0^2\right](\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\\
=&(C_V^2+C_A^2)\left\{8Q^2+4\beta\gamma(Q^2+m^2)(k\cdot Q)^2+4\beta\gamma\omega_0^2Q^2\left[Q^2-2m^2-(k\cdot Q)+\frac{1}{2}\omega_0^2\right]\right.\\
&\left.+(\beta-\gamma)^2\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)-4\left[\gamma^2Q^2(Q^2-m^2)+\beta\gamma\omega_0^2(Q^2+m^2)\right](\epsilon\cdot p_2)^2\right\}\\
&+m^2(C_V^2-C_A^2)\left\{(3\beta^2+2\beta\gamma+3\gamma^2)\omega_0^2Q^2-4\beta\gamma(k\cdot Q)^2-4\left(3\gamma^2Q^2-\beta\gamma\omega_0^2\right)(\epsilon\cdot p_2)^2\right\}
\end{aligned}
\tag{A.76}
$$

$$
\begin{aligned}
I\equiv&\int\frac{d^3q_1}{(2\pi)^32q_1^0}\frac{d^3q_2}{(2\pi)^32q_2^0}(2\pi)^4\delta^4(Q-q_1-q_2)\sum_{spin}N^{\alpha\beta}(q_1,q_2)E_{\alpha\beta}\frac{(Ge)^2}{2}\\
=&\frac{2G^2e^2}{3\pi}(C_V^2+C_A^2)\left\{4Q^2+2\beta\gamma(Q^2+m^2)(k\cdot Q)^2+2\beta\gamma\omega_0^2Q^2\left[Q^2-2m^2-(k\cdot Q)+\frac{1}{2}\omega_0^2\right]\right.\\
&+\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2)+\left[\gamma^2Q^2(Q^2-m^2)+\beta\gamma\omega_0^2(Q^2+m^2)\right]\\
&\left.\cdot\frac{1}{(p_1\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}\left[2\beta^{-1}\gamma^{-1}(m^2-(p_1\cdot p_2))+m^2(k\cdot Q)^2-\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2(m^2+(p_1\cdot p_2))\right]\right\}\\
&+\frac{2G^2e^2}{3\pi}(C_V^2-C_A^2)m^2\left\{\frac{1}{2}(3\beta^2+2\beta\gamma+3\gamma^2)\omega_0^2Q^2-2\beta\gamma(k\cdot Q)^2\right.\\
&\left.+\frac{3\gamma^2Q^2-\beta\gamma\omega_0^2}{(p_1\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}\left(2\beta^{-1}\gamma^{-1}(m^2-(p_1\cdot p_2))+m^2(k\cdot Q)^2-\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2(m^2+(p_1\cdot p_2))\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{A.77}
$$

ここで、

$$
\sum_{spin}(\epsilon\cdot p_2)^2=-\frac{1}{(p_1\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}\left[2\beta^{-1}\gamma^{-1}(m^2-(p_1\cdot p_2))+m^2(k\cdot Q)-\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2(m^2+(p_1\cdot p_2))\right]
\tag{A.78}
$$

を用いた。単位体積、単位時間あたりのエネルギー損失率は以下の式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
Q =& \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} f_F(E_1) \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}[1-f_F(E_2)] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} f_P(\omega)(E_1+\omega-E_2)I \\
=& \frac{1}{2^3(2\pi)^9} \cdot 4\pi \int_0^\infty \frac{p_1^2 dp_1}{E_1} f_F(p_1) \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega} f_P(\omega) \int_{-1}^1 dz \int \frac{d^3p_2}{E_2}[1-f_F(E_2)](E_1+\omega-E_2)I \\
=& \frac{1}{4(2\pi)^7} \int_0^\infty \frac{p_1^2 dp_1}{E_1} f_F(p_1) \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega} f_P(\omega) \int_{-1}^1 dz \int \frac{d^3p_2}{E_2}[1-f_F(E_2)](E_1+\omega-E_2)I
\end{aligned} \tag{A.79}
$$

$$
z \equiv \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{k}}{|\vec{p}_1| \left|\vec{k}\right|} \tag{A.80}
$$

質量 m の粒子を静止座標系から運動座標系へローレンツ変換する。

$$
L^{-1}(p')^\rho_\sigma = \begin{pmatrix} E'_p/m & p'^j/m \\ -p'_i/m & \delta^j_i - p'_i p'^j/m(E'_p+m) \end{pmatrix} \tag{A.81}
$$

$$
L^{-1}(p')^\rho_\sigma p_\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}(E'_p E_p - \vec{p}' \cdot \vec{p}) \\ p_i - \frac{1}{m}(E_p - (\vec{p}' \cdot \vec{p})/(E'_p+m))p'_i \end{pmatrix} \tag{A.82}
$$

$$
L^{-1}(p')^\rho_\sigma k_\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}(E'_p \omega - \vec{p}' \cdot \vec{k}) \\ k_i - \frac{1}{m}(\omega - (\vec{p}' \cdot \vec{k})/(E'_p+m))p'_i \end{pmatrix} \tag{A.83}
$$

ローレンツ変換を p と k の重心系に取る。

$$
\frac{1}{m}\left[E_p + \omega - \frac{(\vec{p}' \cdot \vec{p} + \vec{k})}{(E'_p+m)}\right]\vec{p}' = \vec{p} + \vec{k} \tag{A.84}
$$

両辺に $\vec{p}'$ をかけると以下のようになる。

$$
\frac{1}{m}(E_p+\omega)\vec{p}'^2 - \frac{1}{m}(E'_p - m)(\vec{p}' \cdot \vec{p} + \vec{k}) = (\vec{p}' \cdot \vec{p} + \vec{k}) \tag{A.85}
$$

$$
(\vec{p}' \cdot \vec{p} + \vec{k}) = (E_p+\omega)\frac{\vec{p}'^2}{E_{p'}} \tag{A.86}
$$

$$
\frac{1}{m}\left(E_p + \omega - \frac{1}{E_{p'}}(E_p+\omega)(E'_p - m)\right)\vec{p}' = \vec{p} + \vec{k} \tag{A.87}
$$

すなわち、

$$
\frac{\vec{p}'}{E'_p} = \frac{\vec{p} + \vec{k}}{E_p + \omega} \tag{A.88}
$$

となる。両辺を 2 乗する。

$$
\begin{aligned}
1 - \left[\frac{m}{E'_p}\right]^2 =& \frac{1}{(E_p+\omega)^2}\left[\vec{p}^2 + \vec{k}^2 + 2(\vec{p} \cdot \vec{k})\right] \\
=& \frac{1}{(E_p+\omega)^2}\left[E_p^2 + \omega^2 + 2E_p \cdot \omega - m^2 - \omega_0^2 - 2(\vec{p} \cdot \vec{k})\right] \\
=& 1 - \frac{1}{(E_p+\omega)^2}\left[m^2 + \omega_0^2 + 2(\vec{p} \cdot \vec{k})\right]
\end{aligned} \tag{A.89}
$$

$$\frac{E_{p'}}{m} = (E_p + \omega)/\gamma \tag{A.90}$$

$$\gamma = [m^2 + \omega_0^2 + 2(\vec{p} \cdot \vec{k})]^{1/2} \tag{A.91}$$

$$\frac{\vec{p}}{m} = \frac{\vec{p} + \vec{k}}{E_p + \omega} \frac{E_{p'}}{m} = \frac{\vec{p} + \vec{k}}{\gamma} \tag{A.92}$$

$$L^{-1}(p')^{\rho}_{\sigma} = \begin{pmatrix} (E_p + \omega)/\gamma & (p_i + k)^j/\gamma \\ -(p_i + k)_i/\gamma & \delta_i^j - (p_i + k)_i (p_i + k)^j/\gamma(E_p + \omega + \gamma) \end{pmatrix} \tag{A.93}$$

$$\gamma = [m^2 + \omega_0^2 + 2(p_i \cdot k)]^{1/2} \tag{A.94}$$

$$\begin{aligned} p'_{i\sigma} \equiv L^{-1}(p')^{\rho}_{\sigma}(p_i)_{\rho} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}(E_p(E_p + \omega) - \vec{p}_i \cdot (\vec{p}_i + \vec{k})) \\ (p_i)_i - \frac{1}{\gamma}(E_p - \vec{p}_i \cdot (\vec{p}_i + \vec{k})/(E_p + \omega + \gamma))(p_i + k)_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}(m^2 + (p_i \cdot k)) \\ (p_i)_i - \frac{1}{\gamma} \frac{m^2 + (p_i \cdot k) + E_p \gamma}{E_p + \omega + \gamma} (p_i + k)_i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.95}$$

$$\begin{aligned} k'_{\sigma} \equiv L^{-1}(p')^{\rho}_{\sigma}(k)_{\rho} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}(\omega(\omega + E_p) - \vec{k} \cdot (\vec{p}_i + \vec{k})) \\ k_i - \frac{1}{\gamma}(\omega - \vec{k} \cdot (\vec{p}_i + \vec{k})/(E_p + \omega + \gamma))(p_i + k)_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}(\omega_0^2 + (p_i \cdot k)) \\ k_i - \frac{1}{\gamma} \frac{\omega_0^2 + (p_i \cdot k) + \omega\gamma}{E_p + \omega + \gamma} (\vec{p}_i + \vec{k})_i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.96}$$

また、

$$\begin{aligned} \omega_0^2 + (p_i \cdot k) + \omega\gamma =& \omega_0^2 + m^2 + (\omega + E_p)\gamma + 2(p_i \cdot k) - m^2 - (p_i \cdot k) - E_p\gamma \\ =& \gamma(E_p + \omega + \gamma) - m^2 - (p_i \cdot k) - E_p\gamma \end{aligned} \tag{A.97}$$

$$k'_{\sigma} \equiv L^{-1}(p')^{\rho}_{\sigma}(k)_{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}(\omega_0^2 + (p_i \cdot k)) \\ -(p_i)_i + \frac{1}{\gamma} \frac{m^2 + (p_i \cdot k) + E_p\gamma}{E_p + \omega + \gamma} (p_i + k)_i \end{pmatrix} \tag{A.98}$$

より、逆変換は以下のようになる。

$$L(p)^{\rho}_{\sigma} = \begin{pmatrix} (E_p + \omega)/\gamma & -(p_i + k)^j/\gamma \\ (p_i + k)_i/\gamma & \delta_i^j - (p_i + k)_i (p_i + k)^j/\gamma(E_p + \omega + \gamma) \end{pmatrix} \tag{A.99}$$

$$p_{f\sigma} \equiv L(p)^{p}_{\sigma}(p'_f)_{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}((E_p + \omega)E'_f + (\vec{p}_i + \vec{k}) \cdot \vec{p}'_f) \\ p'_{fi} + \frac{1}{\gamma}(E'_f + \vec{p}'_f \cdot (p_i + k)/(E_p + \omega + \gamma))(p_i + k)_i \end{pmatrix} \tag{A.100}$$

エネルギー・運動量保存則より

$$\begin{aligned} (p_i + k)^2 =& (p_f + q_1 + q_2)^2 \\ =& (p'_f + q'_1 + q'_2)^2 \\ =& \left[E'_f + q'_1 + \sqrt{(\vec{q}'_1 - \vec{p}'_f)^2} \right]^2 \end{aligned} \tag{A.101}$$

$f(q_1') = q_1' + \sqrt{q_1'^2 + p_f'^2 - 2q_1'p_f'\cos\theta}$ の最小値を求める。

$$\frac{\partial f(q_1')}{\partial q_{1i}'} = \frac{q_1'i}{q_1} + \frac{(q_1' - p_f')_i}{q_2} = 0 \tag{A.102}$$

両辺に $q_1'i$ をかけて加えると、

$$q_1' + \vec{q}_1' \cdot (\vec{q}_1' - p_f')/q_2 = 0 \tag{A.103}$$

$$q'2_1 \cdot (\vec{q_1'} - \vec{p}_f')^2 = (q'2_1 - q_1' \cdot p_f')^2 \tag{A.104}$$

$$q'4_1 - 2q'2_1(q_1' \cdot p_f') + q'2_1 p_f' 2 = q'4_1 - 2q'2_1(q_1' \cdot p_f') + (q_1' \cdot p_f')^2 \tag{A.105}$$

となる。すなわち、$\vec{q}_1'$ と $\vec{p}_f'$ とが平行のとき $f(q_1')$ は極値をとる。$\vec{q}' = \alpha p_f'$ とおく。

$$f(q_1') = (|\alpha| + |\alpha - 1|)p_f' = \begin{cases} (2\alpha - 1)p_f' & \alpha \geq 1 \text{ のとき} \\ p_f' & 0 \leq \alpha < 1 \text{ のとき} \\ (-2\alpha + 1)p_f' & \alpha < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{A.106}$$

従って、$f(q_1')$ の最小値は p_f' であり、左辺を固定したとき p_f' は最大値をとる。よって、p_f' の最大値は、

$$m^2 + \omega_0^2 + 2(p_i \cdot k) = m^2 + p_f'^2 + p_f'^2 + 2p_f' E_f' \tag{A.107}$$

$$4p_f'^2(p_f'^2 + m^2) = 4p_f'^4 - 4\alpha p_f'^2 + \alpha^2 \tag{A.108}$$

$$4(m^2 + \alpha)p_f'^2 = \alpha^2 \tag{A.109}$$

ゆえに、

$$p_f' = \frac{1}{2\gamma}\left[2(p_i \cdot k) + \omega_0^2\right] = \frac{1}{\gamma}\left[(p_i \cdot k) + \frac{1}{2}\omega_0^2\right] \tag{A.110}$$

$$(p_f')_{max} = \frac{1}{\gamma}\left[(p_i \cdot k) + \frac{1}{2}\omega_0^2\right] \tag{A.111}$$

となる。変数を以下のように定義する。

$$x = \frac{E_i}{k_B T} \tag{A.112}$$

$$y = \frac{\omega}{k_B T} \tag{A.113}$$

$$\nu = \frac{\mu}{k_B T} \tag{A.114}$$

$$w = \hat{p}_i \cdot \hat{k} \quad (-1 \leq w \leq 1) \tag{A.115}$$

$$z = \frac{\hat{p}_f' \cdot (\vec{p}_i + \vec{k})}{\left|\vec{p}_i + \vec{k}\right|} \tag{A.116}$$

$$\lambda = \frac{k_B T}{m} \tag{A.117}$$

$$\gamma = \frac{\hbar\omega_0}{k_B T} \tag{A.118}$$

$$t = \frac{p'_f}{\omega'} \quad (0 \le t \le 1) \tag{A.119}$$

$$\omega' = \frac{(p_i \cdot k) + \omega_0^2/2}{\left(m^2 + \omega_0^2 + 2(p_i \cdot k)\right)^{1/2}} \tag{A.120}$$

$$D \equiv \frac{m^2}{(p_i \cdot k) + \omega_0^2/2} \tag{A.121}$$

よって

$$\begin{aligned}
\omega' =& m^2 \frac{(p_i \cdot k) + \omega_0^2/2}{m^2} \frac{1}{m} \frac{1}{\left\{1 + 2\left[(p_i \cdot k) + \omega_0^2/2\right]/m^2\right\}^{1/2}} \\
=& m \frac{1}{D} \frac{1}{(1 + 2/D)^{1/2}} \\
=& \frac{m}{[D(D+2)]^{1/2}}
\end{aligned} \tag{A.122}$$

$$\begin{aligned}
\eta \equiv& [m^2 + \omega_0^2 + 2(p_i \cdot k)]^{1/2} \\
=& m \left(1 + \frac{2}{D}\right)^{1/2} \\
=& m \left(\frac{D+2}{D}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{A.123}$$

$$\begin{aligned}
E_f =& \frac{(E_i + \omega)E'_f + \vec{p}'_f \cdot (\vec{p}_i + \vec{k})}{\eta} \\
=& k_B T \frac{\omega'}{\eta} \left[(x+y)\frac{E'_f}{\omega'} + \frac{tz\left|\vec{p}_i + \vec{k}\right|}{k_B T}\right]
\end{aligned} \tag{A.124}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega'}{\eta} =& \frac{m}{[D(D+2)]^{1/2}} \frac{1}{m} \left(\frac{D}{D+2}\right)^{1/2} \\
=& \frac{1}{D+2}
\end{aligned} \tag{A.125}$$

$$\begin{aligned}
S \equiv& \frac{E'_f}{\omega'} \\
=& \left(\frac{m^2}{\omega'^2} + t^2\right)^{1/2} \\
=& [t^2 + D(D+2)]^{1/2}
\end{aligned} \tag{A.126}$$

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|^2 =&\vec{p}_i^2+\vec{k}^2+2\left(\vec{p}_i\cdot\vec{k}\right)\\ =&(E_i+\omega)^2-2\left[(p_i\cdot k)+\omega_0^2/2\right]-m^2\\ =&(k_BT)^2\left[(x+y)^2-\frac{1}{\lambda^2}\frac{D+2}{D}\right]\\ =&(k_BT)^2(x+y)^2\left[1-\frac{D+2}{\lambda^2D(x+y)^2}\right]\end{aligned} \tag{A.127}$$

$$\frac{\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|}{k_BT}\equiv(x+y)G \tag{A.128}$$

$$G=\left[1-\frac{D+2}{D\lambda^2(x+y)^2}\right]^{1/2} \tag{A.129}$$

$$E_f\equiv\frac{k_BT}{D+2}(x+y)(S+tzG) \tag{A.130}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3p'_f}{E'_f} =&\omega'^2\frac{t^2dt}{S}\\ =&m^2\frac{1}{D(D+2)}\frac{t^2}{S}dt\end{aligned} \tag{A.131}$$

$$(E_i+\omega-E_f)\frac{d^3p'_f}{E'_f}=m^2k_BT(x+y)\left(1-\frac{1}{D(D+2)}\frac{t^2}{S}dt\right) \tag{A.132}$$

$$\frac{p_i^2dp_i}{E_i}=(k_BT)^2\sqrt{x^2-\lambda^{-2}}dx \tag{A.133}$$

$$\frac{k^2dk}{\omega}=(k_BT)^2\sqrt{y^2-\gamma^2}dy \tag{A.134}$$

よって、$\frac{d^3p_2}{E_2}=\frac{d^3p'_f}{E'_f}$ に注意すると、

$$\begin{aligned}Q_\pm =&\frac{m^2(k_BT)^5}{4(2\pi)^7}\int_{\lambda^{-1}}^\infty\frac{\sqrt{x^2-\lambda^{-2}}}{e^{x\pm\nu}+1}dx\int_\gamma^\infty\frac{x+y}{e^y-1}\sqrt{y^2-\gamma^2}dy\int_{-1}^1dw\frac{1}{D(D+2)}\\ &\cdot\int_0^1\frac{t^2dt}{S}\int_{-1}^1dz\left(1-\frac{S+GtZ}{D+2}\right)\frac{1}{1+\exp\left[-(x+y)(S+GtZ)/(D+2)\mp\nu\right]}\int_0^{2\pi}d\varphi I\end{aligned} \tag{A.135}$$

$$\begin{aligned}D\equiv&\frac{m^2}{(p_i\cdot k)+\omega_0^2/2}\\ =&\frac{1}{\lambda^2}\left\{xy-\left[(x^2-\lambda^{-2})(y^2-\gamma^2)\right]^{1/2}w+\frac{\gamma^2}{2}\right\}^{-1}\end{aligned} \tag{A.136}$$

$$S=[t^2+D(D+2)]^{1/2} \tag{A.137}$$

$$
\begin{aligned}
Q^2 =&(p_i + k - p_f)^2\\
=&(p_i' + k' - p_f')^2\\
=&(p_i^{0\prime} + k^{0\prime} - E_f')^2 - \vec{p}_f'^2\\
=&(p_i^{0\prime} + k^{0\prime})^2 - 2(p_i^{0\prime} + k^{0\prime})E_f' + m^2\\
=&[\omega_0^2 + m^2 + 2(p_i \cdot k)] - 2[\omega_0^2 + m^2 + 2(p_i \cdot k)]\frac{\omega'}{\eta}S + m^2\\
=&m^2\left\{2 + \frac{2}{D} - 2\left(1 + \frac{2}{D}\right)\frac{1}{D+2}S\right\}\\
=&2m^2\frac{1}{D}(1 + D - S)
\end{aligned}
\tag{A.138}
$$

$(k \cdot p_f) = (k' \cdot p_f')$ の計算

$$
\begin{aligned}
(k' \cdot p_f') =&k'^0 p_f'^0 - \vec{k}' \cdot \vec{p}_f'\\
=&k^{0\prime}\omega'\left(S - \frac{\vec{k}' \cdot \vec{t}}{k'^0}\right)
\end{aligned}
\tag{A.139}
$$

ここで、

$$
\vec{t} = \frac{\vec{p}_f'}{\omega'}
\tag{A.140}
$$

$$
\begin{aligned}
k^{0\prime}\omega' =&\frac{1}{\eta}[\omega_0^2 + (p_i \cdot k)]\frac{1}{\eta}\left[(p_i \cdot k) + \frac{1}{2}\omega_0^2\right]\\
=&\frac{[(p_i \cdot k) + \omega_0^2/2)((p_i \cdot k) + \omega_0^2/2 + \omega_0^2/2]}{m^2\left\{1 + 2[(p_i \cdot k) + \omega_0^2/2]/m^2\right\}}\\
=&m^2\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D} + \frac{\omega_0^2}{2m^2}\right)/\left(1 + \frac{2}{D}\right)\\
=&\frac{m^2}{2D}\frac{2 + \omega_0^2 D/m^2}{2 + D}\\
=&\frac{m^2}{2D}\frac{2 + C}{2 + D}
\end{aligned}
\tag{A.141}
$$

$$
C = \frac{\omega_0^2}{m^2}D = \gamma^2\lambda^2 D
\tag{A.142}
$$

$$
L = \frac{D+2}{C+2}
\tag{A.143}
$$

である。よって、

$$
k^{0\prime}\omega' = \frac{m^2}{2DL}
\tag{A.144}
$$

である。次に $\frac{\vec{k}'}{k'^0}$ を $\frac{\vec{p}_i+\vec{k}}{\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|}$ の成分とそれに直交する成分に分解する。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\vec{k}'}{k'^0}\right)^2 =&1-\left(\frac{\omega_0^2}{k'^0}\right)^2\\ =&1-\omega_0^2\frac{m^2}{[\omega_0^2+(p_i\cdot k)]^2}\left\{1+2\frac{[(p_i\cdot k)+\omega_0^2/2]}{m^2}\right\}\\ =&1-\frac{\omega_0^2}{m^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{D}+\frac{C}{2D}\right)^2}\left(1+\frac{2}{D}\right)\\ =&1-4C\frac{D+2}{(2+C)^2}\\ =&\frac{1}{2+C}(2+C-4CL)\\ =&\frac{4}{C+2}\frac{1}{E}\end{aligned} \tag{A.145}$$

ここで、

$$\frac{1}{E}=\frac{1}{4}(C+2-4CL) \tag{A.146}$$

$$\begin{aligned}K^2\equiv&\left(\frac{\vec{k}'}{k'^0}\right)^2\\ =&\frac{4}{E(C+2)}\end{aligned} \tag{A.147}$$

$$\begin{aligned}B\equiv&\frac{1}{k'^0}\vec{k}'\frac{\vec{p}_i+\vec{k}}{\left|\vec{k}+\vec{p}_i\right|}\\ =&\frac{1}{(\omega_0^2+(p_i\cdot k))}\frac{1}{\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|}\left\{\eta\vec{k}\cdot(\vec{p}_i+\vec{k})-\frac{\omega_0^2+\omega\eta+(p_i\cdot k)}{E_{p_1}+\omega+\eta}\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|^2\right\}\end{aligned} \tag{A.148}$$

$$(\vec{k}\cdot\vec{p}_i)+\vec{k}^2=\omega^2-\omega_0^2+\omega E_{p_i}-(p_i\cdot k) \tag{A.149}$$

$$\begin{aligned}(E_{p_i}+\omega)^2-\eta^2=&E_{p_i}^2+2E_{p_i}\omega+\omega^2-m^2-\omega_0^2-2(p_i\cdot k)\\ =&p_i^2+2(\vec{p}_i\cdot\vec{k})+k^2\\ =&\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|^2\end{aligned} \tag{A.150}$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
&\left\{\eta\vec{k}\cdot(\vec{p}_i+\vec{k})-\frac{\omega_0^2+\omega\eta+(p_i\cdot k)}{E_{p_i}+\omega+\eta}\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|^2\right\}\\
=&\eta(\omega^2-\omega_0^2+\omega E_{p_i}-(p_i\cdot k)+\omega_0^2+\omega\eta+(p_i\cdot k)-\omega(E_{p_1}+\omega))-(E_{p_1}+\omega)(\omega_0^2+(p_1\cdot k))\\
=&\omega(\omega_0^2+m^2+2(p_i\cdot k))-(E_{p_1}+\omega)(\omega_0^2+(p_i\cdot k))\\
=&m^2k_BT\left[y\left(1+\frac{2}{D}\right)-(x+y)\frac{1}{2D}(2+C)\right]\\
=&\frac{m^2k_BT}{2D}\left[2y(D+2)-(x+y)(2+C)\right]\\
=&m^2k_BT\frac{2+C}{2D}\left[2Ly-(x+y)\right] \qquad \text{(A.151)}
\end{aligned}
$$

$$
\omega_0^2+(p_i\cdot k)=\frac{m^2}{2D}(2+C) \qquad \text{(A.152)}
$$

$$
\left|\vec{p}_i+\vec{k}\right|=k_BT(x+y)G \qquad \text{(A.153)}
$$

$$
\begin{aligned}
B=&\frac{2D}{m^2(2+C)}\frac{1}{k_BT(x+y)G}m^2k_BT\frac{2+C}{2D}\left[2Ly-(x+y)\right]\\
=&\frac{[2Ly-(x+y)]}{[(x+y)G]} \qquad \text{(A.154)}
\end{aligned}
$$

である。$\vec{n}\equiv\frac{\vec{p}_i+\vec{k}}{|\vec{p}_i+\vec{k}|}$ に直交する 2 つのベクトルを $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ とすれば、$\vec{e}_i$ への $\frac{\vec{k}'}{k'^0}$ の成分は $\sqrt{K^2-B^2}\equiv A$ であるから、

$$
\frac{\vec{k}'}{k_0'}=B\vec{n}+A\cos\varphi_i\vec{e}_1+A\sin\varphi_i\vec{e}_2 \quad (A=\sqrt{K^2-B^2}) \qquad \text{(A.155)}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k'^0}(\vec{p}_f'\cdot\vec{k}')=&Bp_f'z+A\sqrt{1-z^2}p_f'(\cos\varphi_f\cos\varphi_i+\sin\varphi_f\sin\varphi_i)\\
=&Bp_f'z+A\sqrt{1-z^2}p_f'\cos\varphi \qquad \text{(A.156)}
\end{aligned}
$$

$$
\varphi\equiv\varphi_f-\varphi_i \qquad \text{(A.157)}
$$

となる。よって

$$
\frac{1}{k'^0\omega'}(\vec{p}_f'\cdot\vec{k}')=Bzt+\sqrt{K^2-B^2}\sqrt{1-z^2}t\cos\varphi \qquad \text{(A.158)}
$$

$$
(k'\cdot p_f')=\frac{m^2}{2DL}\left[(S-Bzt)-\sqrt{(K^2-B^2)(1-z^2)}t\cos\varphi\right] \qquad \text{(A.159)}
$$

$$
\begin{aligned}
(p_f\cdot k)-\frac{\omega_0^2}{2}=&\frac{m^2}{2DL}\left[(S-CL-Btz)-\sqrt{1-z^2}\sqrt{K^2-B^2}t\cos\varphi\right]\\
\equiv&\frac{m^2}{2DL}(a-b\cos\varphi)\\
\equiv&\frac{m^2}{2DL}f(\varphi) \qquad \text{(A.160)}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$f(\varphi) \equiv (a - b\cos\varphi) \tag{A.161}$$

$$a = (S - CL - Btz) \tag{A.162}$$

$$b = \sqrt{1-z^2}\sqrt{K^2 - B^2}t \tag{A.163}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = a \tag{A.164}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a > b \text{ のとき}) \tag{A.165}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi} \tag{A.166}$$

証明）$\tan\frac{\varphi}{2} = t$ とおくと、$\cos\varphi = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) = \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$dt = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\frac{d\varphi}{2}, \quad d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi} = 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2} \tag{A.167}$$

$a > |b|$ のとき　$t = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\varphi \quad dt = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}d\varphi$

$$4\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \tag{A.168}$$

$a < |b|$ のとき

$$4\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2} = 0 \tag{A.169}$$

よって、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)^2} = \frac{a}{(a^2-b^2)^{3/2}} \tag{A.170}$$

ゆえに、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = a \tag{A.171}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)} = F^{-1/2} \tag{A.172}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)^2} = aF^{-3/2} \tag{A.173}$$

ただし、

$$F = a^2 - b^2 \tag{A.174}$$

$$
\begin{aligned}
Q^2 =&(p_i + k - p_f)^2 \\
=&2m^2 + \omega_0^2 + 2(p_i \cdot k) - 2(k \cdot p_f) - 2(p_i \cdot p_f)
\end{aligned} \tag{A.175}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
2(p_i \cdot p_f) =&2m^2 + \omega_0^2 + 2(p_i \cdot k) - 2(k \cdot p_f) - Q^2 \\
=&2m^2 + 2\left[(p_i \cdot k) + \frac{1}{2}\omega_0^2\right] - 2\left[(k \cdot p_f) - \frac{1}{2}\omega_0^2\right] - Q^2 - \omega_0^2 \\
=&m^2\left[2 + \frac{2}{D} - 2 \cdot \frac{1}{2DL}(a - b\cos\varphi) - 2 \cdot \frac{1}{D}(1 + D - S) - \frac{\omega_0^2}{m^2}\right] \\
=&\frac{m^2}{D}\left[2S - \frac{1}{L}f(\varphi) - C\right]
\end{aligned} \tag{A.176}
$$

$$
\begin{aligned}
(p_i \cdot p_f) =&\frac{m^2}{2D}\left[2S - \frac{1}{L}f(\varphi) - C\right] \\
=&\frac{m^2}{2D}(2S - C) - \gamma^{-1}
\end{aligned} \tag{A.177}
$$

$$
\begin{aligned}
(k \cdot Q) =&\omega_0^2 + (k \cdot p_i) - (k \cdot p_f) \\
=&(k \cdot p_i) + \frac{1}{2}\omega_0^2 - \left[(k \cdot p_f) - \frac{1}{2}\omega_0^2\right] \\
=&(\beta^{-1} - \gamma^{-1})
\end{aligned} \tag{A.178}
$$

$$
(k \cdot Q)^2 = (\beta^{-1} - \gamma^{-1})^2 \tag{A.179}
$$

$$
\beta^{-1} = \frac{m^2}{D} \tag{A.180}
$$

$$
\gamma^{-1} = \frac{m^2}{2DL}f(\varphi) \tag{A.181}
$$

I の $d\varphi$ 積分

1.
$$
\int_0^{2\pi} Q^2 d\varphi = 2\pi\frac{m^2}{D}\left[2(1 + D - S)\right] \tag{A.182}
$$

2.
$$
Q^2 + m^2 = \frac{2m^2}{D}\left(1 + \frac{3}{2}D - S\right) \tag{A.183}
$$

$$
\beta\gamma(k \cdot Q)^2 = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} - 2 \tag{A.184}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\varphi(Q^2 + m^2)\beta\gamma(k \cdot Q)^2 =&\frac{m^2}{D}2\left(1 + \frac{3}{2}D - S\right)\int_0^{2\pi}\left[\frac{m^2}{D}\frac{2DL}{m^2}\frac{1}{f(\varphi)} + \frac{D}{m^2}\frac{m^2}{2DL}f(\varphi) - 2\right] \\
=&2\pi\frac{m^2}{D}\left[2\left(1 + \frac{3}{2}D - S\right)\left(2LF^{-1/2} + \frac{a}{2L} - 2\right)\right]
\end{aligned} \tag{A.185}
$$

3.

$$\begin{aligned} Q^2-2m^2-(k\cdot Q)+\frac{1}{2}\omega_0^2 =& \frac{2m^2}{D}(1-S)-\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{m^2}{2D}C \\ =& \frac{2m^2}{D}\left(1+\frac{C}{4}-S\right)-\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right) \end{aligned} \tag{A.186}$$

よって

$$\begin{aligned} \beta\gamma\left(Q^2-2m^2-(k\cdot Q)+\frac{1}{2}\omega_0^2\right) =& \frac{D}{m^2}\frac{2DL}{m^2}\frac{2m^2}{D}\left(1+\frac{C}{4}-S\right)\frac{1}{f(\varphi)}-\frac{2DL}{m^2}\frac{1}{f(\varphi)}+\frac{D}{m^2} \\ =& \frac{DL}{m^2}(4+C-4S)\frac{1}{f(\varphi)}-\frac{DL}{m^2}\frac{2}{f(\varphi)}+\frac{D}{m^2} \end{aligned} \tag{A.187}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi\beta\gamma\omega_0^2Q^2\left[Q^2-2m^2-(k\cdot Q)+\frac{1}{2}\omega_0^2\right] =& \frac{m^2}{D}C\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{2m^2}{D}(1+D-S)\frac{D}{m^2}\left[1+L(2+C-4S)\frac{1}{f(\varphi)}\right] \\ =& 2\pi\frac{m^2}{D}\left\{2C(1+D-S)\left[1+L(2+C-4S)F^{-1/2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{A.188}$$

4.

$$\begin{aligned} \omega_0^2Q^2(Q^2-m^2) =& \frac{m^2}{D}C\frac{m^2}{D}2(1+D-S)\frac{m^2}{D}2\left(1+\frac{D}{2}-S\right) \\ =& 4\left(\frac{m^2}{D}\right)^3C(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right) \end{aligned} \tag{A.189}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi(\beta-\gamma)^2 =& \left(\frac{D}{m^2}\right)^2\int_0^{2\pi} d\varphi\left(1-4L\frac{1}{f(\varphi)}+4L^2\frac{1}{f(\varphi)^2}\right) \\ =& 2\pi\left(\frac{D}{m^2}\right)^2\left(1-4LF^{-1/2}+4L^2aF^{-3/2}\right) \end{aligned} \tag{A.190}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi(\beta-\gamma)^2\omega_0^2Q^2(Q^2-m^2) = 2\pi\left(\frac{m^2}{D}\right)\left[4C(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)\left(1-4LF^{-1/2}+4L^2aF^{-3/2}\right)\right] \tag{A.191}$$

5.

$$\begin{aligned}
(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2=&\left(\beta^{-1}-\frac{1}{2}\omega_0^2\right)-m^2\omega_0^2\\
=&\beta^{-2}\left[1-\beta^2\omega_0^2\left(m^2+(p_i\cdot k)+\frac{1}{2}\omega_0^2-\frac{1}{4}\omega_0^2\right)\right]\\
=&\beta^{-2}\left[1-\beta^2\omega_0^2\left(m^2+(p_i\cdot k)+\frac{1}{4}\omega_0^2\right)\right]\\
=&\left(\frac{m^2}{D}\right)^2\left[1-\left(\frac{D}{m^2}\right)^2\frac{m^2}{D}Cm^2\left(1+\frac{1}{D}-\frac{C}{4D}\right)\right]\\
=&\left(\frac{m^2}{D}\right)^2\left[1-C\left(D+1-\frac{C}{4}\right)\right]\\
=&\frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{D}\right)^2\left[4+C^2-4C(D+1)\right]\\
=&\frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{D}\right)^2\left[(C+2)^2-4C(D+2)\right]\\
=&\left(\frac{m^2}{D}\right)^2\frac{C+2}{4}(C+2-4CL)
\end{aligned}\tag{A.192}$$

よって

$$(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2=\left(\frac{m^2}{D}\right)^2\frac{C+2}{E}\tag{A.193}$$

$$\frac{1}{(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}=\left(\frac{D}{m^2}\right)^2\frac{E}{C+2}\tag{A.194}$$

また

$$Q^2(Q^2-m^2)=4\left(\frac{m^2}{D}\right)^2(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)\tag{A.195}$$

より

$$\frac{Q^2(Q^2-m^2)}{(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}=\frac{4E}{C+2}(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)\tag{A.196}$$

(i)

$$\begin{aligned}
\gamma^2 2\beta^{-1}\gamma^{-1}[m^2-(p_1\cdot p_2)]=&2\frac{m^2}{D}\frac{2DL}{m^2}\frac{1}{f(\varphi)}\frac{m^2}{2D}\left[2D-2S+C+\frac{1}{L}f(\varphi)\right]\\
=&\frac{m^2}{D}2L\frac{1}{f(\varphi)}\left[2D-2S+C+\frac{1}{L}f(\varphi)\right]
\end{aligned}\tag{A.197}$$

よって

$$\int_0^{2\pi}\gamma^2 2\beta^{-1}\gamma^{-1}[m^2-(p_1\cdot p_2)]d\varphi=2\pi\frac{m^2}{D}\left\{L\left[4(D-S)+2C\right]F^{-1/2}+2\right\}\tag{A.198}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
m^2\gamma^2(k\cdot Q)^2 =& m^2\gamma^2\left(\beta^{-1}-\gamma^{-1}\right)^2 \\
=& m^2\left(\frac{\gamma^2}{\beta^2}-2\frac{\gamma}{\beta}+1\right) \\
=& m^2\left[\left(\frac{m^2}{D}\right)^2\left(\frac{2DL}{m^2}\right)^2\frac{1}{f(\varphi)^2}-2\frac{m^2}{D}\frac{2DL}{m^2}\frac{1}{f(\varphi)}+1\right] \\
=& m^2\left[4L^2\frac{1}{f(\varphi)^2}-4L\frac{1}{f(\varphi)}+1\right]
\end{aligned}
\tag{A.199}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\varphi\gamma^2 m^2(k\cdot Q)^2 =& 2\pi m^2\left(4L^2aF^{-3/2}-4LF^{-1/2}+1\right) \\
=& 2\pi\frac{m^2}{D}\left[D\left(4L^2aF^{-3/2}-4LF^{-1/2}+1\right)\right]
\end{aligned}
\tag{A.200}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\gamma^2\omega_0^2Q^2\left[m^2+(p_i\cdot p_f)\right] =& \omega_0^2\left(\frac{2DL}{m^2}\right)^2\frac{1}{f(\varphi)^2}\frac{2m^2}{D}(1+D-S)\frac{m^2}{2D}\left[2D+2S-C-\frac{1}{L}f(\varphi)\right] \\
=& 2L^2\omega_0^2(1+D-S)\frac{1}{f(\varphi)^2}\left[4(S+D)-2C-\frac{2}{L}f(\varphi)\right] \\
=& 2\frac{m^2}{D}CL^2(1+D-S)\frac{1}{f(\varphi)^2}\left[4(S+D)-2C-\frac{2}{L}f(\varphi)\right]
\end{aligned}
\tag{A.201}
$$

よって

$$
\int_0^{2\pi}\gamma^2\left\{-\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2\left[m^2+(p_i\cdot p_f)\right]\right\} = 2\pi\frac{m^2}{D}\left\{-CL^2(1+D-S)\left[[4(S+D)-2C]aF^{-3/2}-\frac{2}{L}F^{-1/2}\right]\right\}
\tag{A.202}
$$

$$
\begin{aligned}
J_1 \equiv& \int_0^{2\pi} d\varphi\gamma^2Q^2(Q^2-m^2)\frac{1}{(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}\left[2\beta^{-1}\gamma^{-1}[m^2-(p_i\cdot p_f)]+m^2(k\cdot Q)^2-\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2[m^2+(p_i\cdot p_f)]\right] \\
=& 2\pi\frac{m^2}{D}(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)\frac{4E}{C+2}\Big\{2+L\left[4(D-S)+2C\right]F^{-1/2}+D-4DLF^{-1/2} \\
&+4L^2aDF^{-3/2}+2CL(1+D-S)F^{-1/2}F^{-1/2}-CL^2(1+D-S)\left[4(S+D)-2C\right]aF^{-3/2}\Big\}
\end{aligned}
\tag{A.203}
$$

$$
F^0\ term = D+2
\tag{A.204}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{-1/2}\ term =& 4DL-4LS+2LC-4DL+2CL+2CLD-2CLS \\
=& -2LS(C+2)+2CL(D+2) \\
=& 2L(C+2)\left(-S+C\frac{D+2}{C+2}\right) \\
=& 2L(C+2)(-S+CL)
\end{aligned}
\tag{A.205}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{-3/2}\ term =& aL^2\left\{4D - C(1+D-S)[4(S+D)-2C]\right\} \\
=& aL^2\left\{4D - 2C(1+D-S)[2(S+D+1)-C-2]\right\} \\
=& aL^2\left\{4D + 2C(C+2)(1+D-S) - 4C[(1+D)^2 - S^2]\right\}
\end{aligned} \tag{A.206}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
(D-S+1)[2(D+S)-C] =& 2D^2 - 2S^2 - C(D-S) + 2(D+S) - C \\
=& 2D^2 - 2t^2 - 2D^2 - 4D - CD + CS + 2D + 2S - C \\
=& -2t^2 - 2D - CD - C + S(C+2)
\end{aligned} \tag{A.207}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{-3/2}\ term =& 2aL^2\left[2D + 2t^2C + 2DC + C^2D + C^2 - SC(C+2)\right] \\
=& aL\left[4LD + 4LCt^2 + 4LDC + 2LC^2D + 2LC^2 - 2SCL(C+2)\right] \\
=& aL\left[4LD + 4LCt^2 + 4LDC + 2LC^2D + 2LC^2 + (S-CL)^2(C+2)\right. \\
&\left. -(t^2 + D^2 + 2D)(C+2) - C^2L(D+2)\right] \\
=& aL\left\{(C+2)[(S-CL)^2 - K^2t^2]\right. \\
&\left. +L(4D + 4DC + 2C^2D + 2C^2 - DC^2 - 4DC - 4D - C^2D - 2C^2)\right\} \\
=& aL(C+2)\left[(S-CL)^2 - K^2t^2\right]
\end{aligned} \tag{A.208}
$$

よって

$$
J_1 = 2\pi\frac{m^2}{D}(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)4EL\left\{1 - 2(S-CL)F^{-1/2} + a[(S-CL)^2 - K^2t^2]F^{-3/2}\right\} \tag{A.209}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
\omega_0^2(Q^2+m^2) =& \frac{m^2}{D}C\frac{2m^2}{D}\left(1+\frac{3}{2}D-S\right) \\
=& 2\left(\frac{m^2}{D}\right)^2 C\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)
\end{aligned} \tag{A.210}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega_0^2(Q^2+m^2)}{(p_i\cdot k)^2 - m^2\omega_0^2} =& 2\left(\frac{m^2}{D}\right)^2 C\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)\left(\frac{D}{m^2}\right)^2\frac{E}{C+2} \\
=& 2C\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)\frac{E}{C+2}
\end{aligned} \tag{A.211}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
\beta\gamma(2\beta^{-1}\gamma^{-1})[m^2 - (p_i\cdot p_f)] =& 2\frac{m^2}{2D}\left[2D - 2S + C + \frac{1}{L}f(\varphi)\right] \\
=& \frac{m^2}{D}\left[2D - 2S + C + \frac{1}{L}f(\varphi)\right]
\end{aligned} \tag{A.212}
$$

よって

$$\int_0^{2\pi}\beta\gamma(2\beta^{-1}\gamma^{-1})[m^2-(p_i\cdot p_f)]=2\pi\frac{m^2}{D}\left(2D-2S+C+\frac{a}{L}\right) \tag{A.213}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\beta\gamma m^2(k\cdot Q)^2=&\frac{m^2}{D}D\beta\gamma\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\\=&\frac{m^2}{D}D\left(\frac{\gamma}{\beta}-2+\frac{\beta}{\gamma}\right)\\=&\frac{m^2}{D}D\left[\frac{m^2}{D}\frac{2DL}{m^2}\frac{1}{f(\varphi)}-2+\frac{D}{m^2}\frac{m^2}{2DL}f(\varphi)\right]\\=&\frac{m^2}{D}D\left[\frac{2L}{f(\varphi)}-2+\frac{1}{2L}f(\varphi)\right]\end{aligned} \tag{A.214}$$

よって

$$\int_0^{2\pi}d\varphi m^2(k\cdot Q)^2=2\pi\frac{m^2}{D}D\left(2LF^{-1/2}+\frac{a}{2L}-2\right) \tag{A.215}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\beta\gamma\omega_0^2Q^2[m^2+(p_i\cdot p_f)]=&\frac{D}{m^2}\frac{2DL}{m^2}\frac{1}{f(\varphi)}\frac{m^2}{D}C\frac{2m^2}{D}(1+D-S)\frac{m^2}{2D}\left[2D+2S-C-\frac{1}{L}f(\varphi)\right]\\=&2\frac{m^2}{D}(1+D-S)\frac{LC}{f(\varphi)}\left[2D+2S-C-\frac{1}{L}f(\varphi)\right]\end{aligned} \tag{A.216}$$

よって

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\beta\gamma\left(-\frac{1}{2}\omega_0^2\right)Q^2(m^2+p_i\cdot p_f)=2\pi\frac{m^2}{D}LC(1+D-S)\left[\frac{1}{L}-(2D+2S-C)F^{-1/2}\right] \tag{A.217}$$

$$\begin{aligned}J_2\equiv&\int_0^{2\pi}d\varphi\beta\gamma\omega_0^2(Q^2+m^2)\frac{1}{(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}\left\{2(\beta\gamma)^{-1}[m^2-(p_i\cdot p_f)]+m^2(k\cdot Q)^2-\frac{1}{2}\omega_0^2[m^2+(p_i\cdot p_f)]\right\}\\=&2\pi\frac{m^2}{D}\left\{\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)\frac{2CE}{C+2}\left[2D-2S+C+\frac{a}{L}+2DLF^{-1/2}+\frac{aD}{2L}-2D\right.\right.\\&\left.\left.+C(1+D-S)-LC(2D+2S-C)(1+D-S)F^{-1/2}\right]\right\}\\=&2\pi\frac{m^2}{D}\left\{\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)CE\left[a+\frac{2}{C+2}[C(2+D)-S(C+2)]\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{2}{C+2}L[2D-C(2D+2S-C)(1+D-S)]F^{-1/2}\right]\right\}\\=&2\pi\frac{m^2}{D}\left\{\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)CE\left[a-2(S-CL)+\frac{2}{C+2}L[2D-C(2D+2S-C)(1+D-S)]F^{-1/2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{A.218}$$

ここで

$$\begin{aligned}
[2(D+S)-C](D-S+1) =& 2D^2-2S^2-C(D-S)+2(D+S)-C \\
=& 2D^2-2t^2-2D^2-4D-CD+S(2+C)+2D-C \\
=& -2t^2-2D-C(D+1)+S(2+C)
\end{aligned} \tag{A.219}$$

$$t^2\ term = \frac{2}{C+2}L\cdot 2C \tag{A.220}$$

$$\begin{aligned}
t^0\ term =& \frac{2}{C+2}L[2D+2CD+C^2(D+1)-S(2+C)C] \\
=& -2CLS+\frac{2}{C+2}L[2D+2CD+C^2(D+1)] \\
=& (S-CL)^2-S^2-C^2L^2+\frac{2}{C+2}L[2D+2CD+C^2(D+1)] \\
=& (S-CL)^2-t^2
\end{aligned} \tag{A.221}$$

よって

$$J_2 \equiv 2\pi\frac{m^2}{D}\left\{\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)CE[a-2(S-CL)+((S-CL)^2-K^2)F^{-1/2}]\right\} \tag{A.222}$$

7.

$$\begin{aligned}
\omega_0^2Q^2 =& \frac{m^2}{D}C\cdot 2m^2\frac{1}{D}(1+D-S) \\
=& 2\left(\frac{m^2}{D}\right)^2 C(1+D-S)
\end{aligned} \tag{A.223}$$

$$3\beta^3+2\beta\gamma+3\gamma^2 = \left(\frac{D}{m^2}\right)^2\left[3+2\cdot 2L\frac{1}{f(\varphi)}+3\cdot 4L^2\frac{1}{f(\varphi)^2}\right] \tag{A.224}$$

よって

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\omega_0^2Q^2(3\beta^2+2\beta\gamma+3\gamma^2) = \frac{2\pi}{D}\left[2CD(1+D-S)\left(3+4LF^{-1/2}+12L^2aF^{-3/2}\right)\right] \tag{A.225}$$

8.

$$Q^2+m^2 = \frac{2m^2}{D}\left(1+\frac{3}{2}D-S\right) \tag{A.226}$$

2. より

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\beta\gamma(k\cdot Q)^2 = \frac{2\pi}{D}\left[D\left(2LF^{-1/2}+\frac{a}{2L}-2\right)\right] \tag{A.227}$$

9.

$$Q^2-m^2 = \frac{2m^2}{D}\left(1+\frac{1}{2}D-S\right) \tag{A.228}$$

5. より

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\varphi\gamma^2Q^2\frac{1}{(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}\left[2\beta^{-1}\gamma^{-1}(m^2-p_i\cdot p_f)+m^2(k\cdot Q)^2-\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2(m^2+p_i\cdot p_f)\right] \\
=& \frac{2\pi}{D}\left\{(1+D-S)2DEL\left[1-2(S-CL)F^{-1/2}+a\left((S-CL)^2-K^2t^2\right)F^{-3/2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{A.229}$$

10. 6. より

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} d\varphi\beta\gamma\omega_0^2\frac{1}{(p_i\cdot k)^2-m^2\omega_0^2}\left[2\beta^{-1}\gamma^{-1}(m^2-p_i\cdot p_f)+m^2(k\cdot Q)^2-\frac{1}{2}\omega_0^2Q^2(m^2+p_i\cdot p_f)\right]\\ =&\frac{2\pi}{D}\left\{\frac{1}{2}CDE\left[a-2(S-CL)+((S-CL)^2-K^2t^2)F^{-1/2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{A.230}$$

$$U\equiv S-CL \tag{A.231}$$

これを定義すると、

$$\begin{aligned}I=&\frac{4G^2e^2m^2}{3D}\left\{(C_V^2+C_A^2)\left[8(1+D-S)+4\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)\left(2LF^{-1/2}+\frac{a}{2L}-2\right)\right.\right.\\ &+4C(1+D-S)\left(1+L(2+C-4S)F^{-1/2}\right)+2C(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)\left(1-4LF^{-1/2}+4L^2aF^{-3/2}\right)\\ &+4EL(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)\left(1-2UF^{-1/2}+a(U^2-K^2t^2)F^{-3/2}\right)\\ &\left.+\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)CE\left(a-2U+(U^2-K^2t^2)F^{-1/2}\right)\right]\\ &+(C_V^2-C_A^2)\left[CD(1+D-S)\left(3+4LF^{-1/2}+12L^2aF^{-3/2}\right)-2D\left(2LF^{-1/2}+\frac{a}{2L}-2\right)\right.\\ &\left.\left.+6DEL\left(1-2UF^{-1/2}+a(U^2-K^2t^2)F^{-3/2}\right)(1+D-S)-\frac{1}{2}CDE\left(a-2U+(U^2-K^2t^2)F^{-1/2}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{A.232}$$

$$\begin{aligned}I=&\frac{16G^2e^2m^2}{3D}\left\{(C_V^2+C_A^2)\left[(1+D-S)N+(1+D-S)\left(1+\frac{D}{2}-S\right)H+\left(1+\frac{3}{2}D-S\right)M\right]\right.\\ &\left.+(C_V^2-C_A^2)\left[(1+D-S)W+J\right]\right\}\end{aligned} \tag{A.233}$$

$$N=2+C\left[1+L\left(2+C-4S\right)F^{-1/2}\right] \tag{A.234}$$

$$H=\frac{1}{2}C\left(1-4LF^{-1/2}+4L^2aF^{-3/2}\right)+EL\left[1-2UF^{-1/2}+a\left(U^2-K^2t^2\right)F^{-3/2}\right] \tag{A.235}$$

$$M=\left(2LF^{-1/2}+\frac{a}{2L}-2\right)+\frac{EC}{4}\left[a-2U+\left(U^2-K^2t^2\right)F^{-1/2}\right] \tag{A.236}$$

$$W=\frac{1}{4}D\left\{C\left(3+4LF^{-1/2}+12L^2aF^{3/2}\right)+6LE\left[1-2UF^{-1/2}+a\left(U^2-K^2t^2\right)F^{-3/2}\right]\right\} \tag{A.237}$$

$$J=-\frac{1}{2}D\left(2LF^{-1/2}+\frac{a}{2L}-2\right)-\frac{1}{8}CDE\left[a-2U+(U^2-K^2t^2)F^{-1/2}\right] \tag{A.238}$$

$$\alpha\equiv\frac{e^2}{4\pi} \tag{A.239}$$

$$Q_{\pm} \equiv \frac{\left(Gm^2\right)^2 \alpha}{12\pi^6} \left(k_B T\right)^5 \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} \frac{\left(x^2 - \lambda^{-2}\right)^{1/2}}{e^{x \pm \nu} + 1} dx \int_{\gamma}^{\infty} \frac{(x+y)}{e^y - 1} \left(y^2 - \gamma^2\right)^{1/2} dy \int_{-1}^{1} dw \frac{1}{D^2 (D+2)}$$
$$\times \int_0^1 \frac{t^2 dt}{S} \int_{-1}^{1} dz \left(1 - \frac{S + Gtz}{D+2}\right) \frac{I}{1 + \exp\left[-(x+y)(S+Gtz)/(D+2) \mp \nu\right]} \tag{A.240}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(C_V^2 + C_A^2\right)\left[(1+D-S) N + (1+D-S)\left(1 - S + \frac{D}{2}\right) H + \left(1 - S + \frac{3}{2} D\right) M\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left(C_V^2 - C_A^2\right)\left[J + (1+D-S) W\right] \tag{A.241}$$

$$N = 2 + C\left[1 + L(2 + C - 4S) F^{-1/2}\right] \tag{A.242}$$

$$H = \frac{1}{2} C \left(1 - 4LF^{-1/2} + 4L^2 a F^{-3/2}\right) + EL\left[1 - 2UF^{-1/2} + a\left(U^2 - K^2 t^2\right) F^{-3/2}\right] \tag{A.243}$$

$$M = \left(2LF^{-1/2} + \frac{a}{2L} - 2\right) + \frac{EC}{4}\left[a - 2U + \left(U^2 - K^2 t^2\right) F^{-1/2}\right] \tag{A.244}$$

$$W = \frac{1}{4} D \left\{C\left(3 + 4LF^{-1/2} + 12L^2 a F^{-3/2}\right) + 6LE\left[1 - 2UF^{-1/2} + a\left(U^2 - K^2 t^2\right) F^{-3/2}\right]\right\} \tag{A.245}$$

$$J = -\frac{1}{2} D \left(2LF^{-1/2} + \frac{a}{2L} - 2\right) - \frac{1}{8} CDE\left[a - 2U + (U^2 - K^2 t^2) F^{-1/2}\right] \tag{A.246}$$

$$a = U - Btz \tag{A.247}$$

$$b = \left(1 - z^2\right)^{1/2} \left(K^2 - B^2\right)^{1/2} t \tag{A.248}$$

$$C = \lambda^2 \gamma^2 D \tag{A.249}$$

$$D = \lambda^{-2} \left\{xy - \left[\left(x^2 - \lambda^{-2}\right)\left(y^2 - \gamma^2\right)\right]^{1/2} w + \frac{\gamma^2}{2}\right\}^{-1} \tag{A.250}$$

$$E = \frac{4}{C + 2 - 4CL} \tag{A.251}$$

$$F = a^2 - b^2 \tag{A.252}$$

$$G = \left[1 - \frac{D+2}{D\lambda^2 (x+y)^2}\right]^{1/2} \tag{A.253}$$

$$K = \frac{2}{\left[E(C+2)\right]^{1/2}} \tag{A.254}$$

$$L = \frac{D+2}{C+2} \tag{A.255}$$

$$S = \left[t^2 + D(D+2)\right]^{1/2} \tag{A.256}$$

$$U = S - CL \tag{A.257}$$

$$\gamma = \frac{\hbar \omega_0}{k_B T} \tag{A.258}$$

$$\lambda^{-1} = \frac{mc^2}{k_B T} \tag{A.259}$$

付 録B　フォトニュートリノ計算プログラム

```
      program s_main
c-------------------------------------------------------------------c
c                                                                   c
c                                                                   c
c                                                                   c
c-------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 nam_in
      integer*4     num_06
      parameter    (num_06 = 6)
c+
c+
c*    ----- get job name -----
      call s_get_job_name(nam_in)
c*
c*    ----- open file no. 6 -----
      call s_open_file_06(nam_in, num_06)
c*
c*    ----- job control program -----
      call s_contl(nam_in)
c*
c*    ----- close file no. 6 -----
      call s_flcls(num_06)
c*
c*
      stop
      end
```

```
      subroutine s_get_job_name(nam_in)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 nam_in
c*
c*
      call s_c256(   nam_in)
      call getarg(1, nam_in)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_c256(flname)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 flname
      character*1   empty
      parameter    (empty = ' ')
      integer*4     n256
      parameter    (n256 = 256)
      integer*4     ic
c*
c*
      do ic = 1, n256
        flname(ic:ic) = empty
      end do
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_open_file_06(nam_in, num_06)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 nam_in
      integer*4     num_06
      character*256 flname, msg
      integer*4     len_s , len_e
      integer*4     i_form, i_stat
      parameter    (i_form = 0, i_stat = 1)
c*
c*
      msg = '.lis'
      call s_lenx(nam_in, len_s , len_e )
      flname = nam_in(len_s:len_e)//msg(1:4)
c*
c*    ----- open file no. 06 -----
      call s_flopn(flname, num_06, i_form, i_stat)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_lenx(flname, len_s , len_e )
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 flname
      integer*4     len_s , len_e
c*
c*
      call s_len1(flname, len_s )
c*
c*
      call s_len2(flname, len_s , len_e)
c*
c*
      return
      end
      subroutine s_len1(flname, len   )
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 flname
      integer*4     len
      character*1   empty
      parameter    (empty = ' ')
      integer*4     ic
c*
```

```
c*
      ic = 0
   10 continue
        ic = ic + 1
        if (ic .gt. 256)
     1    then
           write(6,9000)
        end if
        if (flname(ic:ic) .eq. empty)   go to 10
        len = ic
c*
c*
      return
 9000 format('flname is empty at s_len1')
      end
      subroutine s_len2(flname, len_s , len_e)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 flname
      integer*4     len_s , len_e
      character*1   empty
      parameter    (empty = ' ')
      integer*4     ic
c*
c*
      ic = len_s
   10 continue
        if (flname(ic:ic) .eq. empty)
     1    then
           len_e = ic - 1
          else
           ic = ic + 1
```

```
            if (ic .gt. 256)
     1       then
               len_e = ic
             else
               go to 10
            end if
         end if
c*
c*
       return
       end
```

```
      subroutine s_flopn(flname, numbfl, i_form, i_stat)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 flname
      integer*4     numbfl, i_form, i_stat
c*
c*
      if (i_form .eq. 0)
     1 then
         if (i_stat .eq. 0)
     1    then
            open(unit = numbfl,        file   = flname,
     1           status = 'old',       access = 'sequential',
     2           form   = 'formatted', err    = 900         )
         else if (i_stat .eq. 1)
     1    then
            open(unit = numbfl,        file   = flname,
     1           status = 'unknown',   access = 'sequential',
     2           form   = 'formatted', err    = 900         )
         end if
c*
c*
      else if (i_form .eq. 1)
     1 then
         if (i_stat .eq. 0)
     1    then
            open(unit = numbfl,          file   = flname,
     1           status = 'old',         access = 'sequential',
     2           form   = 'unformatted', err    = 900         )
         else if (i_stat .eq. 1)
     1    then
```

```
            open(unit = numbfl,          file   = flname,
     1           status = 'unknown',     access = 'sequential',
     2           form   = 'unformatted', err    = 900         )
         end if
      end if
c*
c*
      return
  900 continue
      write(6,9000) flname
 9000 format('file open error at s_flopn',/,
     1       'file name = ', a32)
      stop 99
      return
      end
```

```
      subroutine s_contl(nam_in)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 nam_in
c*
c*
      include 'zzcntl'
c*
c*
c*    ----- initial setting -----
      call s_cnstx
c*
c*    ----- input data -----
      call s_input(nam_in)
c*
c*    ----- setting the numbers -----
      call s_set_number
c*
c*    ----- allocation -----
      call s_alloc
c*
c*      ----- precondtion -----
        call s_precon
c*
c*      ----- photo neutrino emissivity -----
        call s_emissivity
c*
c*
        call s_output_x(nam_in)
c*
c*
```

```
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_cnstx
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
c*    ----- physical constants -----
      call s_cnstp
c*
c*
c*    ----- mathematical constants -----
      call s_cnstm
c*
c*
c*    ------ parameters -----
      call s_cnstc
c*
c*
      return
      end

      subroutine s_cnstc
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      include 'zzpara'
c*
c*
```

```
      n_02 = 2
      n_03 = 3
      n_04 = 4
c*
c*
      return
      end

      subroutine s_cnstm
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      include 'zzcnst'
c*
c*
      pi = acos(-1.d0)
c*
c*
      return
      end
      subroutine s_cnstp

c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      include 'zzcnst'
c*
```

```
c*
      hbar  = 6.58211915d-16
      s_l   = 2.99792458d8
      e_c   = 1.6021892d-19
      e_m   = 0.5109989d6
      k_b   = 8.617343d-5
      alpha = 1.d0/137.036d0
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_input(nam_in)
c---------------------------------------------------------------------c
c                                                                     c
c                                                                     c
c                                                                     c
c---------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 nam_in
      character*256 flname, msg
      integer*4     len_s , len_e
      integer*4     numbfl
      parameter    (numbfl = 80)
      integer*4     i_form, i_stat
      parameter    (i_form = 0, i_stat = 0)

c*
c*
      include 'zzcntl'
c*
c*
      msg = '.inp'
      call s_lenx(nam_in, len_s , len_e )
      flname = nam_in(len_s:len_e)//msg(1:4)
      write(6,7000) flname
 7000 format(a32)
c*
c*    ----- open input file -----
      call s_flopn(flname, numbfl, i_form, i_stat)
c*
c*
c*    ----- titl -----
      read(numbfl,*) title
c*
c*    ----- setting the temperature  -----
      read(numbfl,*) temper
```

```
c*
c*    ----- setting the dispersion relation -----
c*    dsp_op = 0 ;
c*           = 1 ; Braaten & segel
c*           = 2 ; Full
      read(numbfl,*) dsp_op
c*
c*    ----- setting the initial chemical potential -----
      read(numbfl,*) nyu_i
c*
c*    ----- setting the density -----
c*    ----- rho_op = 0 : rho
c*                 = 1 : log(rho)
      read(numbfl,*) rho_op
      read(numbfl,*) s_rho, e_rho, d_rho
c*
c*    ----- setting the partition number -----
c*    nu    : chemical potential
      read(numbfl,*) nu, nu1, nu2
      read(numbfl,*) dis_g, dis_e, i_shif, j_shif
c*
c*    ----- setting the partition number -----
c*    nx     : integration with respect to x
c*    ny     : integration with respect to y
c*    nw     : integration with respect to w
c*    nt     : integration with respect to t
c*    nz     : integration with respect to z
      read(numbfl,*) nx, ny, nw, nt, nz
c*
c*
      return
  900 continue
      write(6,9000)
 9000 format('file open error')
      stop 99
      return
      end
```

```
      subroutine s_set_number
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
c*    ----- mesh no. of rho -----
      call s_rho_mesh_no
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_rho_mesh_no
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      integer*4  option
      parameter (option = 1)
c*
c*
      call s_rho_mesh_x(option)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_rho_mesh_x(option)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      integer*4 option
c*
c*
      include 'zzcntl'
      include 'zzpara'
      include 'zzwork'
c*
c*
c*
      if (option .eq. 1)
     1 then
         if (rho_op .eq. 0)
     1    then
            call s_rho_mesh_1
     1                 (d_rho , s_rho , e_rho , r_mesh)
         else if (rho_op .eq. 1)
     1    then
            call s_rho_mesh_3
     1                 (d_rho , s_rho, e_rho, r_mesh)
         end if
c*
c*
      else if (option .eq. 2)
     1 then
         if (rho_op .eq. 0)
     1    then
            call s_rho_mesh_2
     1                 (rda(krp(   1)), d_rho , s_rho , e_rho , r_mesh)
```

```
          else if (rho_op .eq. 1)
     1     then
             call s_rho_mesh_4
     1                    (rda(krp(    1)), d_rho , s_rho , e_rho , r_mesh)
          end if
       end if
c*
c*
       return
       end
```

```
      subroutine s_rho_mesh_1(div   , s_pow , e_pow , n_mesh)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    div
      integer*4 s_pow , e_pow , n_mesh
      integer*4 mm
c*
c*
      mm     = nint(1.d0/div)
      n_mesh = 9*mm*(e_pow - s_pow) + 1
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_rho_mesh_2(rho   , div   , s_pow , e_pow , n_mesh)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    rho   , div
      integer*4 s_pow , e_pow , n_mesh
      real*8    dd
      integer*4 pow   , mm    , ic    , ip
c*
c*
      dimension rho(n_mesh)

c*
c*
      mm     = 9*nint(1.d0/div)
c*
      do pow = s_pow, e_pow-1
        dd = 10.d0**pow
        do ic = 1, mm
          ip = ic + mm*(pow - s_pow)
          rho(ip) = dble(ic)*div*dd
        end do
      end do
      rho(n_mesh) = 10.d0**e_pow
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_rho_mesh_3(div   , sl_rho, el_rho, n_mesh)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    div   , sl_rho, el_rho
      integer*4 n_mesh
      integer*4 mm
c*
c*
      mm     = nint((el_rho-sl_rho)/div)
      n_mesh = mm + 1
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_rho_mesh_4(rho   , div   , sl_rho, el_rho, n_mesh)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    rho   , div   , sl_rho, el_rho
      integer*4 n_mesh
      real*8    dd
      integer*4 mm    , ic    , ip
C*
c*
      dimension rho(n_mesh)
c*
c*
      mm  = nint((el_rho-sl_rho)/div)
      if (mm .eq. 0)
     1 then
         div = 0.d0
      else if (mm .gt. 0)
     1 then
         div = (el_rho-sl_rho)/dble(mm)
      end if
c*    write(6,7000) mm, n_mesh
c*    write(6,7010) div
 7000 format(10i6)
 7010 format(1p6e12.4)
c*
      do ic = 0, mm
        ip      = ic + 1
        dd      = dble(ic)*div + sl_rho
        rho(ip) = 10.d0**dd
      end do
c*
```

```
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_alloc
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      integer*4 ic
c*
c*
      include 'zzcnst'
      include 'zzcntl'
      include 'zzpara'
      include 'zzwork'
c*
c*
c*    ----- allocation -----
      krp( 1) = 1
      krp( 2) = krp( 1) + r_mesh
      krp( 3) = krp( 2) + r_mesh
      krp( 4) = krp( 3) + r_mesh
      krp( 5) = krp( 4) + r_mesh
      krp( 6) = krp( 5) + r_mesh
      krp( 7) = krp( 6) + 0
      krp( 8) = krp( 7) + 0
      krp( 9) = krp( 8) + 0
      krp(10) = krp( 9) + 0
      krp(11) = krp(10) + 0
      krp(12) = krp(11) + nu1
      krp(13) = krp(12) + nu1
      krp(14) = krp(13) + nu2
      krp(15) = krp(14) + 0
      krp(16) = krp(15) + ny
      krp(17) = krp(16) + ny
      krp(18) = krp(17) + ny
```

```
      krp(19) = krp(18) + 0
      krp(20) = krp(19) + 0
      krp(21) = krp(20) + 0
      krp(22) = krp(21) + nu
      krp(23) = krp(22) + nx
      krp(24) = krp(23) + ny
      krp(25) = krp(24) + nw
      krp(26) = krp(25) + nt
      krp(27) = krp(26) + nz
      krp(28) = krp(27) + 0
      krp(29) = krp(28) + 0
      krp(30) = krp(29) + 0
      krp(31) = krp(30) + 0
      krp(32) = krp(31) + nu
      krp(33) = krp(32) + nz
      krp(34) = krp(33) + nz
      krp(35) = krp(34) + nz
      krp(36) = krp(35) + nz
      krp(37) = krp(36) + nt
      krp(38) = krp(37) + nt
      krp(39) = krp(38) + nt
      krp(40) = krp(39) + nt
      krp(41) = krp(40) + nw
      krp(42) = krp(41) + nw
      krp(43) = krp(42) + nw
      krp(44) = krp(43) + nw
      krp(45) = krp(44) + ny
      krp(46) = krp(45) + ny
      krp(47) = krp(46) + ny
      krp(48) = krp(47) + ny
      krp(49) = krp(48) + nx
      krp(50) = krp(49) + nx
      krp(51) = krp(50) + nx
      krp(52) = krp(51) + nx
      krp(53) = krp(52) + 0
      krp(54) = krp(53) + 0
c*
      do ic = 55, mrsize
        krp(ic) = krp(ic-1) + 0
```

```
      end do
c*
c*
      kip( 1) = 1
      kip( 2) = kip( 1) + 0
      kip( 3) = kip( 2) + 0
      kip( 4) = kip( 3) + 0
      kip( 5) = kip( 4) + 0
      kip( 6) = kip( 5) + 0
      kip( 7) = kip( 6) + 0
      kip( 8) = kip( 7) + 0
      kip( 9) = kip( 8) + 0
      kip(10) = kip( 9) + 0
      kip(11) = kip(10) + 0
c*
      do ic = 12, misize
        kip(ic) = kip(ic-1) + 0
      end do
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_precon
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      integer*4  option
      parameter (option = 2)
c*
c*    ----- setting the densities -----
      call s_rho_mesh_x(option)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_emissivity
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     rho   , nyu   , lam   , gam
      real*8     zero  , one
      parameter (zero=0.d0, one=1.d0)
      real*8     s_x   , s_y   , s_w   , s_t   , s_z
      real*8     D     , G     , C     , L     , B     , E     , K
      real*8     S     , U     , Dm
      real*8     s_a   , s_b   , F     , N     , H     , M     , W     ,
     1           V
      real*8     lam_i
      real*8     s_w1  , s_w2  , s_w3  , s_x1  , s_y1  , s1    , s2    ,
     1           ph_p  , ph_m  , ans_1 , ans_2 , ans_3 , ans_4
      integer*4  itype0, itype1
      parameter (itype0 = 0, itype1 = 1)
      integer*4  ip_u  , ip_x  , ip_y  , ip_w  , ip_t  , ip_z , ip_u1,
     1           ip_x1
      parameter (ip_u=1, ip_x=2, ip_y=3, ip_w=1, ip_t=2, ip_z=3,
     1           ip_u1=4, ip_x1=5)
      integer*4  ir    , ix    , iy    , iw    , it    , iz
      integer*4  nk    , na
      parameter (nk = 1000)
      real*8     b_w(0:nk)
      real*8     sum1  , sum2  , sum3  , sum4  , x_min , x_max , shift ,
     1           lam_nu, cc    , w1    , w2
      real*8     v_ast , s_k   , mass  , z_tk
      integer*4  ia    , ia_str, nxx
      integer*4  jcount
      real*8     h_d   , h_a   , h_b   , h_c   , h_z1  , h_z2
      real*8     z_min , z_max , sum_b1, sum_b2, sum_b3, sum_b4
```

```
      integer*4  ib    , nb
      real*8     eps
      parameter (eps = 1.d-6)
c*
c*
      include 'zzcnst'
      include 'zzcntl'
      include 'zzpara'
      include 'zzwork'
c*
c*
c*    ----- initialization -----
      jcount = 0
      lam    = k_b*temper/e_m
      lam_i  = 1.d0/lam
      nyu    = nyu_i
      cc     = 6.47623d16*lam**5
c*
      call gaus_init(ip_u  , nu    , itype1)
      call gaus_init(ip_x  , nx    , itype1)
      call gaus_init(ip_y  , ny    , itype1)
      call gaus_init(ip_w  , nw    , itype0)
      call gaus_init(ip_t  , nt    , itype0)
      call gaus_init(ip_z  , nz    , itype0)
      call gaus_init(ip_u1 , nu1   , itype0)
      call gaus_init(ip_x1 , nu2   , itype0)
      call gaus_pnt_inf(rda(krp(  21)), ip_u  , nu    )
      call gaus_pnt_inf(rda(krp(  22)), ip_x  , nx    )
      call gaus_pnt_inf(rda(krp(  23)), ip_y  , ny    )
      call gaus_pnt_fin(rda(krp(  24)),-one   , one   , ip_w  , nw    )
      call gaus_pnt_fin(rda(krp(  25)), zero  , one   , ip_t  , nt    )
c*    call gaus_pnt_fin(rda(krp(  26)),-one   , one   , ip_z  , nz    )
c*
c*    ----- loop of density -----
      do ir = 1, r_mesh
c*
c*      ----- setting density -----
        call s_set_pnt (rda(krp(   1)), rho   , ir    , r_mesh)
c*      ----- debug -----
```

```
      write(6,7100) log10(rho)
c*
c*    ----- setting the chemical potential -----
      call s_calc_chem_pot
     1           (rda(krp(  21)), rda(krp(  31)), rda(krp(  11)),
     2            rda(krp(  12)), nyu   , rho   , lam   , dis_g ,
     3            ip_u  , ip_u1 , nu    , nu1   , i_shif)
c*
c*    ----- setting the gamma -----
      call s_calc_gam
     1           (rda(krp(  21)), rda(krp(  31)), rda(krp(  11)),
     2            rda(krp(  12)),
     3            gam   , v_ast , nyu   , lam   , dis_g , pi    ,
     4            alpha ,
     5            ip_u  , ip_u1 , nu    , nu1   , i_shif, dsp_op)
c*
c*    ----- setting the photon phase space -----
      call s_calc_p_phase
     1           (rda(krp(  23)), rda(krp(  15)), rda(krp(  16)),
     2            rda(krp(  17)), rda(krp(  21)), rda(krp(  31)),
     3            rda(krp(  11)), rda(krp(  12)),
     4            gam   , v_ast , nyu   , lam   , dis_g , pi    ,
     5            alpha ,
     6            ip_u  , ip_u1 , ny    , nu    , nu1   , i_shif,
     7            dsp_op)
c*
      na     = 0
      shift  = 0.d0
      lam_nu = lam_i - nyu
c*    ----- debug -----
      write(6,7000) -lam_nu
      call s_bound_set_up
     1         (b_w   , lam_nu, shift , dis_e , na    , nk    ,
     2          j_shif)
      sum1 = 0.d0
      sum2 = 0.d0
      sum3 = 0.d0
      sum4 = 0.d0
      ia_str = 1
```

```
        na = na + 1
        do ia = ia_str, na
c*      do ia = ia_str, ia_str
          if (ia .lt. na)
     1     then
            x_min = b_w(ia-1)
            x_max = b_w(ia)
            nxx = nu2
c*
c*          ----- partition -----
            call gaus_pnt_fin
     1            (rda(krp(  13)), x_min , x_max , ip_x1 , nu2   )
          else if (ia .eq. na)
     1     then
            nxx = nx
          end if
c*
c*        ----- loop of x -----
          do ix = 1, nxx
c*        do ix = 1, 1
c*
c*          ----- setting x -----
            if (ia .lt. na)
     1       then
              call s_set_pnt (rda(krp(  13)), s_x   , ix    , nx    )
              s_x1 = s_x+lam_i
            else if (ia .eq. na)
     1       then
              call s_set_pnt (rda(krp(  22)), s_x   , ix    , nx    )
              s_x  = s_x+shift
              s_x1 = s_x+lam_i
            end if
c*
c*          ----- loop of y -----
            do iy = 1, ny
c*          do iy = 1, 1
c*
c*            ----- setting y -----
              call s_set_pnt (rda(krp(  23)), s_y   , iy    , ny    )
```

```
              call s_set_pnt (rda(krp(  15)), s_k   , iy    , ny    )
              call s_set_pnt (rda(krp(  16)), mass  , iy    , ny    )
              call s_set_pnt (rda(krp(  17)), z_tk  , iy    , ny    )
              s_y1 = s_y+gam
c*
c*            ----- loop of w -----
              do iw = 1, nw
c*            do iw = 1, 1
c*
c*              ----- setting w -----
                call s_set_pnt (rda(krp(  24)), s_w   , iw    , nw    )
c*
c*
                s_w1 = s_x1*s_y1
c*              ----- Nov. 10 2008 -----
c*              s_w2 = sqrt(s_x*(s_x+2.d0*lam_i)*s_y*(s_y+2.d0*gam))
c*              s_w3 = gam**2/2.d0
                s_w2 = sqrt(s_x*(s_x+2.d0*lam_i))*s_k
                s_w3 = mass**2/2.d0
c*              -----------------------
                Dm = 1.d0/(s_w1-s_w2*s_w+s_w3)
                D = lam_i**2*Dm
                s_w1 = D*lam**2*(s_x1+s_y1)**2
                s_w2 = (D+2.d0)/s_w1
                G = sqrt(1.d0-s_w2)
c*              ----- Nov. 10 2008 -----
c*              C = lam**2*gam**2*D
                C = lam**2*mass**2*D
c*              -----------------------
                L = (D+2.d0)/(C+2.d0)
                s_w1 = (2.d0*L-1.d0)*s_y1-s_x1
                s_w2 = (s_x1 + s_y1)*G
                B = s_w1/s_w2
                E = 4.d0/(C+2.d0-4.d0*C*L)
                K = 2.d0/sqrt(E*(C+2.d0))
c*              write(6,7000) D, G, C, L, B, E, K
c*
c*              ----- loop of t -----
                do it = 1, nt
```

```
c*              do it = 3, 3
c*
c*                ----- setting t -----
                  call s_set_pnt(rda(krp(  25)), s_t   , it    , nt    )
c*
                  S = sqrt(s_t**2+D*(D+2.d0))
                  U = S-C*L
c*
c*                ----- Nov. 13 2008 -----
                  h_a = K*K*s_t*s_t
                  h_b = U*B*s_t
                  h_c = U*U-(K*K-B*B)*s_t*s_t
                  h_d = h_b*h_b-h_a*h_c
                  nb  = 1
                  if (h_d .gt. 0.d0)
     1             then
                     nb   = 2
c*                   nb   = 1
                     h_z1 = (h_b-sqrt(h_d))/h_a
                     h_z2 = (h_b+sqrt(h_d))/h_a
                  end if
                  sum_b1 = 0.d0
                  sum_b2 = 0.d0
                  sum_b3 = 0.d0
                  sum_b4 = 0.d0
                  do ib = 1, nb
                    if (nb .eq. 1)
     1               then
                       z_min =-one
                       z_max = one
                    else if (nb .eq. 2)
     1               then
                       if (ib .eq. 1)
     1                  then
                          z_min =-one
                          z_max = max(-one,h_z1)
                       else if (ib .eq. 2)
     1                  then
                          z_min = min(h_z2,one)
```

```
                  z_max = one
               end if
               if(abs(z_max-z_min) .lt. eps)
     1          then
                  ans_1 = 0.d0
                  ans_2 = 0.d0
                  ans_3 = 0.d0
                  ans_4 = 0.d0
                  go to 11
               end if
            end if
            call gaus_pnt_fin
     1                 (rda(krp(  26)), z_min , z_max ,
     2                  ip_z  , nz    )
c*          ------------------------
c*
c*          ----- loop of z -----
            do iz = 1, nz
c*
c*          ----- setting z -----
              call s_set_pnt
     1                 (rda(krp(  26)), s_z   , iz    , nz    )
c*
              s_a = U-B*s_t*s_z
              s_b = sqrt(1.d0-s_z*s_z)*sqrt(K*K-B*B)*s_t
c*            write(6,7000) s_a, s_b
              if (abs(s_a) .gt. abs(s_b))
     1         then
c*              ----- debug -----
c*              if (nb .eq. 1)
c*   1           then
                F = 1.d0/sqrt(s_a*s_a-s_b*s_b)
               else
                F = 0.d0
                jcount = jcount + 1
                write(6,7000) s_a, s_b, s_a**2-s_b**2,s_a,
     1                        z_min, z_max
                write(6,7000) U, B, s_t, s_z,S,C,L
                if (jcount .gt. 2000) stop 99
```

```
c*                         end if
c*                       else
c*                         F = 0.d0
                       end if
                       N = 2.d0+C*(1.d0+L*(2.d0+C-4.d0*S)*F)
                       s_w3 = (U*U-K*K*s_t*s_t)*F
                       s_w1 = 0.5d0*C*(1.d0-4.d0*L*F+4.d0*L*L*s_a*F**3)
                       s_w2 = E*L*(1.d0-2.d0*U*F+s_a*s_w3*F*F)
                       H = s_w1+s_w2
                       s_w1 = 2.d0*L*F+s_a/(2.d0*L)-2.d0
                       s_w2 = 0.25d0*E*C*(s_a-2.d0*U+s_w3)
                       M = s_w1+s_w2
                       s_w1 = C*(3.d0+4.d0*L*F+12.d0*L*L*s_a*F**3)
                       s_w2 = 6.d0*L*E*(1.d0-2.d0*U*F+s_a*s_w3*F*F)
                       W = D/4.d0*(s_w1+s_w2)
                       V = -0.5d0*D*M
c*                     write(6,7000) F, N, H, M, W, V
c*
                       s_w1 = (1.d0+D-S)*N
                       s_w2 = (1.d0+D-S)*(1.d0-S+D/2.d0)*H
                       s_w3 = (1.d0-S+1.5d0*D)*M
c*
                       s1 = s_w1+s_w2+s_w3
                       s2 = V+(1.d0+D-S)*W
                       s_w3 = (S+G*s_t*s_z)/(D+2.d0)
                       s_w1 = 1.d0-s_w3
                       s_w2 = (s_x1+s_y1)*s_w3
                       ph_m = s_w1/(1.d0+exp(-s_w2-nyu))
                       w1   = s_w2-nyu
                       if (w1 .gt. 0.d0)
     1                   then
                           ph_p = s_w1/(1.d0+exp(-w1))
                         else
                           w2   = exp(w1)
                           ph_p = s_w1*w2/(w2+1.d0)
                       end if
                       ans_1 = ph_m*s1
                       ans_2 = ph_m*s2
                       ans_3 = ph_p*s1
```

```
                      ans_4 = ph_p*s2
c*                    write(6,7010) iz, ans_1, ans_2, ans_3, ans_4
c*
c*                    ----- setting answer -----
                      call s_set_ans
     1                         (rda(krp(  32)), ans_1 , iz    , nz    )
                      call s_set_ans
     1                         (rda(krp(  33)), ans_2 , iz    , nz    )
                      call s_set_ans
     1                         (rda(krp(  34)), ans_3 , iz    , nz    )
                      call s_set_ans
     1                         (rda(krp(  35)), ans_4 , iz    , nz    )
                    end do
c*
c*                  ----- integration over z -----
                    call gaus_int_fin(rda(krp(  32)), z_min , z_max ,
     1                                ans_1 , ip_z  , nz    )
                    call gaus_int_fin(rda(krp(  33)), z_min , z_max ,
     1                                ans_2 , ip_z  , nz    )
                    call gaus_int_fin(rda(krp(  34)), z_min , z_max ,
     1                                ans_3 , ip_z  , nz    )
                    call gaus_int_fin(rda(krp(  35)), z_min , z_max ,
     1                                ans_4 , ip_z  , nz    )
c*
   11               continue
                    sum_b1 = sum_b1 + ans_1
                    sum_b2 = sum_b2 + ans_2
                    sum_b3 = sum_b3 + ans_3
                    sum_b4 = sum_b4 + ans_4
                  end do
c*
c*                ----- phase space of t -----
                  s_w1 = s_t*s_t/S
                  ans_1 = sum_b1*s_w1
                  ans_2 = sum_b2*s_w1
                  ans_3 = sum_b3*s_w1
                  ans_4 = sum_b4*s_w1
c*                write(6,7010) it, ans_1, ans_2, ans_3, ans_4
c*
```

```
c*                  ----- setting answer -----
                    call s_set_ans(rda(krp(  36)), ans_1 , it    , nt    )
                    call s_set_ans(rda(krp(  37)), ans_2 , it    , nt    )
                    call s_set_ans(rda(krp(  38)), ans_3 , it    , nt    )
                    call s_set_ans(rda(krp(  39)), ans_4 , it    , nt    )
                  end do
c*
c*                ----- integration over t -----
                  call gaus_int_fin
     1                       (rda(krp(  36)), zero  , one   , ans_1 ,
     2                        ip_t  , nt    )
                  call gaus_int_fin
     1                       (rda(krp(  37)), zero  , one   , ans_2 ,
     2                        ip_t  , nt    )
                  call gaus_int_fin
     1                       (rda(krp(  38)), zero  , one   , ans_3 ,
     2                        ip_t  , nt    )
                  call gaus_int_fin
     1                       (rda(krp(  39)), zero  , one   , ans_4 ,
     2                        ip_t  , nt    )
c*
c*                ----- phase space of w -----
c*                s_w1 = 1.d0/(Dm*Dm*(D+2.d0))
                  s_w1 = 1.d0/(D*D*(D+2.d0))
                  ans_1 = ans_1*s_w1
                  ans_2 = ans_2*s_w1
                  ans_3 = ans_3*s_w1
                  ans_4 = ans_4*s_w1
c*                write(6,7010) iw, ans_1, ans_2, ans_3, ans_4
c*
c*                ----- setting answer -----
                  call s_set_ans(rda(krp(  40)), ans_1 , iw    , nw    )
                  call s_set_ans(rda(krp(  41)), ans_2 , iw    , nw    )
                  call s_set_ans(rda(krp(  42)), ans_3 , iw    , nw    )
                  call s_set_ans(rda(krp(  43)), ans_4 , iw    , nw    )
                end do
c*
c*              ----- integration over w -----
                call gaus_int_fin(rda(krp(  40)), -one  , one   , ans_1 ,
```

```
     1                          ip_w  , nw    )
              call gaus_int_fin(rda(krp(  41)), -one  , one   , ans_2 ,
     1                          ip_w  , nw    )
              call gaus_int_fin(rda(krp(  42)), -one  , one   , ans_3 ,
     1                          ip_w  , nw    )
              call gaus_int_fin(rda(krp(  43)), -one  , one   , ans_4 ,
     1                          ip_w  , nw    )
c*
c*            ----- phase space of y -----
c*            ----- Nov. 10 2008 -----
c*            s_w2 = (s_x1+s_y1)*sqrt(s_y*(s_y+2.d0*gam))*exp(-s_y1)
              s_w2 = (s_x1+s_y1)*z_tk*s_k*exp(-s_y1)
c*            ------------------------
              s_w3 = 1.d0-exp(-s_y1)
              s_w1 = s_w2/s_w3
              ans_1 = ans_1*s_w1
              ans_2 = ans_2*s_w1
              ans_3 = ans_3*s_w1
              ans_4 = ans_4*s_w1
c*            write(6,7010) iy, ans_1, ans_2, ans_3, ans_4
c*
c*            ----- setting answer -----
              call s_set_ans(rda(krp(  44)), ans_1 , iy    , ny    )
              call s_set_ans(rda(krp(  45)), ans_2 , iy    , ny    )
              call s_set_ans(rda(krp(  46)), ans_3 , iy    , ny    )
              call s_set_ans(rda(krp(  47)), ans_4 , iy    , ny    )
            end do
c*
c*          ----- integration over y -----
            call gaus_int_inf(rda(krp(  44)), ans_1 , ip_y  , ny    )
            call gaus_int_inf(rda(krp(  45)), ans_2 , ip_y  , ny    )
            call gaus_int_inf(rda(krp(  46)), ans_3 , ip_y  , ny    )
            call gaus_int_inf(rda(krp(  47)), ans_4 , ip_y  , ny    )
c*
c*          ----- phase space of x -----
            w1   = s_x1+nyu
            s1   = exp(-w1)
            s_w3 = sqrt(s_x*(s_x+2.d0*lam_i))
            s_w1 = s_w3*s1/(1.d0+s1)
```

```
          w2   = s_x1-nyu
          if (w2 .gt. 0.d0)
     1     then
             s2   = exp(-w2)
             s_w2 = s_w3*s2/(1.d0+s2)
           else
             s_w2 = s_w3/(exp(w2)+1.d0)
          end if
          ans_1 = ans_1*s_w1
          ans_2 = ans_2*s_w1
          ans_3 = ans_3*s_w2
          ans_4 = ans_4*s_w2
c*
c*        ----- setting answer -----
          call s_set_ans(rda(krp(  48)), ans_1 , ix    , nxx   )
          call s_set_ans(rda(krp(  49)), ans_2 , ix    , nxx   )
          call s_set_ans(rda(krp(  50)), ans_3 , ix    , nxx   )
          call s_set_ans(rda(krp(  51)), ans_4 , ix    , nxx   )
c*        write(6,7010) ix, ans_1, ans_2, ans_3, ans_4
        end do
c*
c*      ----- integration over x -----
        if (ia .lt. na)
     1   then
           call gaus_int_fin
     1           (rda(krp(  48)), x_min , x_max , ans_1 ,
     2            ip_x1 , nxx   )
           call gaus_int_fin
     1           (rda(krp(  49)), x_min , x_max , ans_2 ,
     2            ip_x1 , nxx   )
           call gaus_int_fin
     1           (rda(krp(  50)), x_min , x_max , ans_3 ,
     2            ip_x1 , nxx   )
           call gaus_int_fin
     1           (rda(krp(  51)), x_min , x_max , ans_4 ,
     2            ip_x1 , nxx   )

        else if (ia .eq. na)
     1   then
```

```
            call gaus_int_inf(rda(krp(  48)), ans_1 , ip_x  , nxx   )
            call gaus_int_inf(rda(krp(  49)), ans_2 , ip_x  , nxx   )
            call gaus_int_inf(rda(krp(  50)), ans_3 , ip_x  , nxx   )
            call gaus_int_inf(rda(krp(  51)), ans_4 , ip_x  , nxx   )
          end if
          sum1 = sum1 + ans_1
          sum2 = sum2 + ans_2
          sum3 = sum3 + ans_3
          sum4 = sum4 + ans_4
          write(6,7002) ia, ans_1, ans_2, ans_3, ans_4
        end do
        sum1 = cc*sum1
        sum2 = cc*sum2
        sum3 = cc*sum3
        sum4 = cc*sum4
c*
c*      ----- setting answer -----
        call s_set_ans(rda(krp(   2)), sum1  , ir    , r_mesh)
        call s_set_ans(rda(krp(   3)), sum2  , ir    , r_mesh)
        call s_set_ans(rda(krp(   4)), sum3  , ir    , r_mesh)
        call s_set_ans(rda(krp(   5)), sum4  , ir    , r_mesh)
        write(6,7010) ir, sum1, sum2, sum3, sum4
      end do
      write(6,7200) jcount
c*
c*
      return
 7000 format(1p8e12.4)
 7002 format(i4,1p8e12.4)
 7010 format('emissivity =', i6,6x,1p6e12.4)
 7040 format('error =', 1p8e12.4)
 7060 format('error-1 =',5i3,1p8e12.4)
 7070 format('error-2 =',4i3,1p8e12.4)
 7100 format('density =',f9.4)
 7200 format('jount =',i10)
      end
```

```
      subroutine s_set_pnt
     1                 (d     , p     , ip     , n     )
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    d     , p
      integer*4 ip    , n
c*
      dimension d(n)
c*
c*
      p = d(ip)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_calc_chem_pot
     1                 (x      , y      , x1     , y1     , nyu    , rho    ,
     2                  lam    , dis_g ,
     3                  ip_u   , ip_u1 , nu     , nu1    , i_shif)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     x      , y      , x1     , y1     , nyu    , rho    , lam    ,
     1           dis_g
      integer*4  ip_u   , ip_u1 , nu     , nu1    , i_shif
      real*8     eps
      parameter (eps = 1.d-12)
      integer*4  loopmx
      parameter (loopmx = 50)
      real*8     nyu_o , nyu_n , ff     , fp     , ww
      integer*4  ic
c*
c*
      dimension  x (nu )
      dimension  y (nu )
      dimension  x1(nu1)
      dimension  y1(nu1)
c*
c*
      ic    = 0
      nyu_o = nyu
      nyu_n = nyu
   10 continue
        ic = ic + 1
c*
c*      ----- setting the function ff -----
        call s_set_func_ff
```

```
     1              (ff    , x      , y      , x1    , y1    , lam   ,
     2               nyu_o , rho   , dis_g ,
     3               ip_u  , ip_u1 , nu    , nu1   , i_shif)
c*
c*      ----- setting the function fp -----
        call s_set_func_fp
     1              (fp    , x      , y      , x1    , y1    , lam   ,
     2               nyu_o , dis_g ,
     3               ip_u  , ip_u1 , nu    , nu1   , i_shif)
c*
c*
        ww = ff/fp
        nyu_n = nyu_o - ww
        write(6,7000) ic, nyu_n, nyu_o, ww, ff, fp
        if (abs(ww) .gt. eps)
     1   then
           if (ic .lt. loopmx)
     1      then
              nyu_o = nyu_n
              go to 10
            else
              write(6,9000) ic, nyu_o, nyu_n, ww
              stop 99
           end if
        end if
      nyu = nyu_n
c*
c*
      return
 7000 format(i6,1pe22.14,1p6e12.4)
 9000 format('program error found at s_calc_chem_pot',/,
     1       i6,1p6e12.4)
      end
```

```
      subroutine s_set_func_ff
     1                 (ans    , x      , y      , x1     , y1     , lam    ,
     2                  nyu    , rho    , dis_g ,
     3                  ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     ans    , x      , y      , x1     , y1     , lam    , nyu    ,
     1           rho    , dis_g
      integer*4  ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif
      real*8     cc
      parameter (cc = 2.92180d6)
      real*8     gn     , gp     , nyu_p , nyu_n
      real*8     shift
      integer*4  np     , op_flg
      parameter (np = 0, op_flg = 1)
c*
c*
      dimension  x (nn)
      dimension  y (nn)
      dimension  x1(mm)
      dimension  y1(mm)
c*
c*
      nyu_p = nyu
      nyu_n =-nyu
c*
c*
c*    ----- setting the function gn -----
      call s_calc_gn
     1           (x      , y      , x1     , y1     , gn     , lam    ,
     2            nyu_n , dis_g ,
```

```
     3            np    , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
c*
c*    ----- setting the function gp -----
      if (op_flg .eq. 0)
     1 then
        shift = 0.d0
        call s_calc_gn_inf
     1           (x     , y     , gp    , lam   , nyu_p ,
     2            shift , np    , ip    , nn    )
      else if (op_flg .eq. 1)
     1 then
         call s_calc_gn
     1           (x     , y     , x1    , y1    , gp    , lam   ,
     2            nyu_p , dis_g ,
     3            np    , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
      end if
c*
c*
      ans = cc*(gn-gp) - rho
c*
c*
c*    write(6,7000) gn, gp, lam, nyu_n, nyu_p
      return
 7000 format(1p6e12.4)
 9000 format('program error found at s_calc_chem_poy',/,
     1       i6,1p6e12.4)
      end
```

```
      subroutine s_calc_gn
     1                 (x      , y      , x1     , y1     , ans    , lam    ,
     2                  nyu    , dis_g ,
     3                  np     , ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     x      , y      , x1     , y1     , ans    , lam    , nyu    ,
     1           dis_g
      integer*4  np     , ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif
      integer*4  nk     , na
      parameter (nk = 1000)
      real*8     b_w(0:nk)
      real*8     lam_i , shift , lam_nu
      real*8     s_min , s_max , sum    , sum1
      integer*4  ic
c*
c*
      dimension  x (nn)
      dimension  y (nn)
      dimension  x1(mm)
      dimension  y1(mm)
c*
c*    ----- initialization -----
      na     = 0
      shift  = 0.d0
      lam_i  = 1.d0/lam
      lam_nu = lam_i + nyu
      call s_bound_set_up
     1           (b_w    , lam_nu, shift , dis_g , na     , nk     ,
     2            i_shif)
c*
```

```
c*
      sum = 0.d0
      do ic = 1, na
        s_min = b_w(ic-1)
        s_max = b_w(ic)
c*
c*      ----- partition -----
        call gaus_pnt_fin
     1             (x1    , s_min , s_max , iq    , mm    )
c*
c*      ----- setting the function -----
        call s_set_func_gn
     1             (x1    , y1    , lam_i , lam_nu, np    , mm    )
c*
c*      ----- integration -----
        call gaus_int_fin
     1             (y1    , s_min , s_max , sum1  , iq    , mm    )
c*
        sum = sum + sum1
      end do
c*
c*    ----- setting the function -----
      call s_set_func_gn_inf
     1           (x     , y     , lam   , nyu   , shift ,
     2            np    , nn    )
c*
c*    ----- integration -----
      call gaus_int_inf
     1           (y     , sum1  , ip    , nn    )
c*
      ans = lam**(3+np)*(sum + sum1)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_calc_gn_inf
     1                 (x      , y      , ans    , lam    , nyu    ,
     2                  shift , np     , ip     , nn     )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     x      , y      , ans    , lam    , nyu    , shift
      integer*4  np     , ip     , nn
c*
c*
      dimension  x(nn)
      dimension  y(nn)
c*
c*    ----- setting the function -----
      call s_set_func_gn_inf
     1           (x      , y      , lam    , nyu    , shift ,
     2            np     , nn     )
c*
c*    ----- gauss integration -----
      call gaus_int_inf
     1           (y      , ans    , ip     , nn     )
      ans = lam**(3+np)*ans
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_set_func_fp
     1                 (ans    , x      , y      , x1     , y1     , lam    ,
     2                  nyu    , dis_g ,
     3                  ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     ans    , x      , y      , x1     , y1     , lam    , nyu    ,
     1           dis_g
      integer*4  ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif
      real*8     cc
      parameter (cc = 2.92180d6)
      real*8     gn     , gp     , nyu_p , nyu_n
      real*8     shift
      integer*4  np
      parameter (np = 0)
c*
c*
      dimension  x (nn)
      dimension  y (nn)
      dimension  x1(mm)
      dimension  y1(mm)
c*
c*
      nyu_p = nyu
      nyu_n =-nyu
c*
c*
c*    ----- setting the function gn -----
      call s_calc_gnp
     1           (x      , y      , x1     , y1     , gn     , lam    ,
     2            nyu_n , dis_g ,
```

```
     3            np    , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
c*
c*    ----- setting the function gp -----
      shift = 0.d0
      call s_calc_gnp_inf
     1           (x     , y     , gp    , lam   , nyu_p , shift ,
     2            np    , ip    , nn    )
c*
c*
      ans = cc*(gn+gp)
c*
c*
      return
 9000 format('program error found at s_calc_chem_poy',/,
     1       i6,1p6e12.4)
      end
```

```
      subroutine s_calc_gnp
     1                 (x      , y      , x1     , y1     , ans    , lam    ,
     2                  nyu    , dis_g ,
     3                  np     , ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     x      , y      , x1     , y1     , ans    , lam    , nyu    ,
     1           dis_g
      integer*4  np     , ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif
      real*8     ww
      integer*4  nk     , na
      parameter (nk = 1000)
      real*8     b_w(0:nk)
      real*8     lam_i , shift , lam_nu
      real*8     s_min , s_max , sum    , sum1
      integer*4  ic
c*
c*
      dimension  x (nn)
      dimension  y (nn)
      dimension  x1(mm)
      dimension  y1(mm)
c*
c*    ----- initialization -----
      na     = 0
      shift  = 0.d0
      lam_i  = 1.d0/lam
      lam_nu = lam_i + nyu
      call s_bound_set_up
     1           (b_w    , lam_nu, shift , dis_g , na     , nk     ,
     2            i_shif)
```

```
c*
c*
      sum = 0.d0
      do ic = 1, na
        s_min = b_w(ic-1)
        s_max = b_w(ic)
c*
c*      ----- partition -----
        call gaus_pnt_fin
     1             (x1    , s_min , s_max , iq    , mm    )
c*
c*      ----- setting the function -----
        call s_set_func_gnp
     1             (x1    , y1    , lam_i , lam_nu, np    , mm    )
c*
c*      ----- integration -----
        call gaus_int_fin
     1             (y1    , s_min , s_max , sum1  , iq    , mm    )
c*
        sum = sum + sum1
      end do
c*
c*
c*    ----- setting the function -----
      call s_set_func_gnp_inf
     1           (x     , y     , lam   , nyu   , shift ,
     2            np    , nn    )
c*
c*    ----- gauss integration -----
      call gaus_int_inf
     1           (y     , sum1  , ip    , nn    )
      ans = lam**(3+np)*(sum+sum1)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_bound_set_up
     1                 (b_w    , lam_nu, shift , dis    , na     , nk     ,
     2                  i_shif)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     b_w    , lam_nu, shift , dis
      integer*4  na     , nk     , i_shif
      integer*4  m_div
      integer*4  ic
c*
c*
      dimension  b_w(0:nk)
c*
c*    ----- initialization -----
      m_div  = nint(-lam_nu/dis)
      b_w(0) = 0.d0
      if (m_div .gt. 0)   na = m_div
      na = na + i_shif
      if (na .gt. nk)
     1 then
         write(6,9000)  na
         stop 99
      end if
      do ic = 1, na
        b_w(ic) = b_w(ic-1) + dis
      end do
      if (na .gt. 0) shift = b_w(na)
c*
c*
      return
 9000 format('program error found at s_bound_set_up : na =',i6)
```

```
end
```

```
      subroutine s_set_func_gn
     1                 (x     , y     , lam_i , lam_nu, np    , nn    )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    x     , y      , lam_i , lam_nu
      integer*4 np    , nn
      real*8    s     , ww    , w1    , w2    , w3    , w4
      integer*4 ic
c*
      dimension x(nn)
      dimension y(nn)
c*
c*
      do ic = 1, nn
        s  = x(ic)
        w1 = (s+lam_i)**(1+np)
        w2 = sqrt(s*(s+2.d0*lam_i))
        w4 = s + lam_nu
        if (w4 .gt. 0.d0)
     1   then
           ww = exp(-w4)
           w3 = ww/(1.d0+ww)
         else
           w3 = 1.d0/(exp(w4)+1.d0)
        end if
        y(ic) = w1*w2*w3
      end do
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_set_func_gn_inf
     1                 (x      , y      , lam    , nyu    , shift ,
     2                  np     , nn     )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    x      , y       , lam    , nyu    , shift
      integer*4 np     , nn
      real*8    s      , lam_i   , ww     , w1     , w2     , w3     , w4
      real*8    w5
      integer*4 ic
c*
      dimension x(nn)
      dimension y(nn)
c*
c*
      lam_i = 1.d0/lam
      w4    = lam_i + nyu
      do ic = 1, nn
        s  = x(ic) + shift
        w1 = (s+lam_i)**(1+np)
        w2 = sqrt(s*(s+2.d0*lam_i))
        w5 = s+w4
        if (w5 .gt. 0.d0)
     1   then
           ww = exp(-w5)
           w3 = ww/(1.d0+ww)
         else
           w3 = 1.d0/(exp(w5)+1.d0)
        end if
        y(ic) = w1*w2*w3
      end do
```

```
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_set_func_gnp
     1                 (x      , y      , lam_i , lam_nu, np     , nn     )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    x     , y       , lam_i , lam_nu
      integer*4 np    , nn
      real*8    s     , ww    , w1    , w2    , w3    , w4
      integer*4 ic
c*
      dimension x(nn)
      dimension y(nn)
c*
c*
      do ic = 1, nn
        s  = x(ic)
        w1 = (s+lam_i)**(1+np)
        w2 = sqrt(s*(s+2.d0*lam_i))
        w4 = s+lam_nu
        if (w4 .gt. 0.d0)
     1   then
            ww = exp(-w4)
         else
            ww = exp(w4)
        end if
        w3 = ww/(1.d0+ww)**2
        y(ic) = w1*w2*w3
      end do
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_set_func_gnp_inf
     1                 (x      , y      , lam    , nyu    , shift ,
     2                  np     , nn     )
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    x      , y       , lam    , nyu    , shift
      integer*4 np     , nn
      real*8    s      , lam_i   , ww     , w1     , w2     , w3     , w4
      real*8    w5
      integer*4 ic
c*
      dimension x(nn)
      dimension y(nn)
c*
c*
      lam_i = 1.d0/lam
      w4    = lam_i + nyu
      do ic = 1, nn
        s  = x(ic)+shift
        w1 = (s+lam_i)**(1+np)
        w2 = sqrt(s*(s+2.d0*lam_i))
        w5 = s+w4
        if (w5 .gt. 0.d0)
     1   then
           ww = exp(-w5)
         else
           ww = exp(w5)
        end if
        w3 = ww/(1.d0+ww)**2
        y(ic) = w1*w2*w3
      end do
```

```
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_calc_gnp_inf
     1                  (x      , y      , ans    , lam    , nyu    , shift ,
     2                   np     , ip     , nn     )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     x      , y      , ans    , lam    , nyu    , shift
      integer*4  np     , ip     , nn
      real*8     ww
c*
c*
      dimension  x(nn)
      dimension  y(nn)
c*
c*    ----- setting the function -----
      call s_set_func_gnp_inf
     1           (x      , y      , lam    , nyu    , shift ,
     2            np     , nn     )
c*
c*    ----- gauss integration -----
      call gaus_int_inf
     1           (y      , ans    , ip     , nn     )
      ans = lam**(3+np)*ans
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_calc_gam
     1                 (x      , y      , x1     , y1     , gam    , v_ast ,
     2                  nyu    , lam    , dis_g  , pi     , alpha  ,
     3                  ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif, dsp_op)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     x      , y      , x1     , y1     , gam    , v_ast ,
     1           nyu    , lam    , dis_g  , pi     , alpha
      integer*4  ip     , iq     , nn     , mm     , i_shif, dsp_op
      real*8     cc
      real*8     gn1    , gn3    , gn5    , gp1    , gp3    , gp5    ,
     1           nyu_p  , nyu_n
      real*8     shift  , omeg_1
      integer*4  np1    , np3    , np5
      parameter (np1 = -1, np3 = -3, np5 = -5)
      integer*4  op_flg
      parameter (op_flg = 1)
c*
c*
      dimension  x (nn)
      dimension  y (nn)
      dimension  x1(mm)
      dimension  y1(mm)
c*
c*
      omeg_1 = 0.d0
      cc     = 4.d0*alpha/3.d0/pi
      nyu_p  = nyu
      nyu_n  =-nyu
c*
c*    ----- setting the function gp_1 -----
```

```
      if (op_flg .eq. 0)
     1 then
         shift = 0.d0
         call s_calc_gn_inf
     1           (x     , y     , gp1   , lam   , nyu_p , shift ,
     2            np1   , ip    , nn    )
      else if (op_flg .eq. 1)
     1 then
         call s_calc_gn
     1           (x     , y     , x1    , y1    , gp1   , lam   ,
     2            nyu_p , dis_g ,
     3            np1   , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
      end if
c*
c*    ----- setting the function gn_1 -----
      call s_calc_gn
     1           (x     , y     , x1    , y1    , gn1   , lam   ,
     2            nyu_n , dis_g ,
     3            np1   , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
c*
c*    ----- setting the function gp_3 -----
      if (op_flg .eq. 0)
     1 then
         shift = 0.d0
         call s_calc_gn_inf
     1           (x     , y     , gp3   , lam   , nyu_p , shift ,
     2            np3   , ip    , nn    )
      else if (op_flg .eq. 1)
     1 then
         call s_calc_gn
     1           (x     , y     , x1    , y1    , gp3   , lam   ,
     2            nyu_p , dis_g ,
     3            np3   , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
      end if
c*
c*    ----- setting the function gn_3 -----
      call s_calc_gn
     1           (x     , y     , x1    , y1    , gn3   , lam   ,
     2            nyu_n , dis_g ,
```

```
     3            np3   , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
c*
c*
      gam = cc*(2.d0*(gp1+gn1)+gp3+gn3)
      gam = sqrt(gam)/lam
c*
c*    ----- setting the function gp_5 -----
      if (dsp_op .eq. 1)
     1 then
         if (op_flg .eq. 0)
     1    then
            shift = 0.d0
            call s_calc_gn_inf
     1           (x     , y     , gp5   , lam   , nyu_p , shift ,
     2            np5   , ip    , nn    )
         else if (op_flg .eq. 1)
     1    then
            call s_calc_gn
     1           (x     , y     , x1    , y1    , gp5   , lam   ,
     2            nyu_p , dis_g ,
     3            np5   , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
         end if
c*
c*       ----- setting the function gn_5 -----
         call s_calc_gn
     1           (x     , y     , x1    , y1    , gn5   , lam   ,
     2            nyu_n , dis_g ,
     3            np5   , ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
c*
         omeg_1 = cc*(2.d0*(gp1+gn1)+gp3+gn3-3.d0*(gp5+gn5))
         omeg_1 = sqrt(omeg_1)/lam
      end if
      v_ast = omeg_1/gam
c*
c*
      write(6,7000) gp1, gp3, gn1, gn3, gam, v_ast
c*
c*
      return
```

```
7000 format(1p6e12.4)
9000 format('program error found at s_calc_gam',/,
    1       i6,1p6e12.4)
     end
```

```
      subroutine s_calc_p_phase
     1                 (ene   , s_k   , mass  , z_tk  , x     , y     ,
     2                  x1    , y1    , gam   ,
     3                  v_ast , nyu   , lam   , dis_g , pi    , alpha ,
     4                  ip    , iq    , ny    , nn    , mm    , i_shif,
     5                  dsp_op)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     ene   , s_k   , mass  , z_tk  , x     , y     ,
     1           x1    , y1    , gam   , v_ast , nyu   , lam   ,
     2           dis_g , pi    , alpha
      integer*4  ip    , iq    , ny    , nn    , mm    , i_shif, dsp_op
      real*8     cc
c*
c*
      dimension  ene (ny)
      dimension  s_k (ny)
      dimension  mass(ny)
      dimension  z_tk(ny)
      dimension  x   (nn)
      dimension  y   (nn)
      dimension  x1  (mm)
      dimension  y1  (mm)
c*
c*
c*    ----- dsp_op = 0 -----
      if (dsp_op .eq. 0)
     1 then
         call s_calc_disp_00
     1              (ene   , s_k   , mass  , z_tk  , gam   , ny    )
c*
```

```
c*    ----- dsp_op = 1 -----
      else if (dsp_op .eq. 1)
     1 then
         call s_calc_disp_01
     1              (ene   , s_k   , mass  , z_tk  , gam   , v_ast ,
     2               ny    )
c*
c*    ----- dsp_op = 2 -----
      else if (dsp_op .eq. 2)
     1 then
         cc     = 4.d0*alpha/pi
         call s_calc_disp_02
     1              (ene   , s_k   , mass  , z_tk  , x     , y     ,
     2               x1    , y1    , gam   , nyu   , lam   , dis_g ,
     3               cc    ,
     4               ip    , iq    , ny    , nn    , mm    , i_shif)
      end if
c*
c*
      return
 7000 format(1p6e12.4)
 9000 format('program error found at s_calc_phase',/,
     1       i6,1p6e12.4)
      end
```

```
      subroutine s_calc_disp_00
     1                 (ene    , s_k    , mass   , z_tk   , gam    , ny    )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     ene    , s_k    , mass   , z_tk   , gam
      integer*4  ny
      real*8     y
      integer*4  iy
c*
c*
      dimension  ene (ny)
      dimension  s_k (ny)
      dimension  mass(ny)
      dimension  z_tk(ny)
c*
c*
      do iy = 1, ny
        y = ene(iy)
        s_k (iy) = sqrt(y*(y+2.d0*gam))
        mass(iy) = gam
        z_tk(iy) = 1.d0
c*      write(6,7000) iy, s_k(iy), mass(iy), z_tk(iy)
      end do
c*
c*
      return
 7000 format(i3,1p6e12.4)
 7010 format(1p6e12.4)
 9000 format('program error found at s_calc_disp_00',/,
     1       i6,1p6e12.4)
      end
```

```
      subroutine s_calc_disp_01
     1                 (ene    , s_k    , mass   , z_tk   , gam    , v_ast ,
     2                  ny     )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     ene    , s_k    , mass   , z_tk   , gam    , v_ast
      integer*4  ny
      real*8     y      , gam2   , ws_k   , pi_t   , d_pi_t
      integer*4  iy
c*
c*
      dimension  ene (ny)
      dimension  s_k (ny)
      dimension  mass(ny)
      dimension  z_tk(ny)
c*
c*
      gam2 = gam*gam
      ws_k = 0.d0
      do iy = 1, ny
        y = ene(iy)+gam
c*      write(6,7000) iy, gam, y, ws_k
        ws_k = max(ene(iy),ws_k)
        call s_calc_appr_pi_t
     1             (y      , v_ast , gam2   , ws_k   , pi_t   , d_pi_t)
        s_k (iy) = ws_k
        mass(iy) = sqrt(pi_t)
        z_tk(iy) = 1.d0/(1.d0+d_pi_t)
        write(6,7000) iy, ene(iy), y, sqrt(y*y-pi_t)
        write(6,7000) iy, s_k(iy), mass(iy), z_tk(iy), z_tk(iy)*s_k(iy),
     1                sqrt(ene(iy)*(ene(iy)+2.d0*gam)), gam
```

```
      end do
c*
c*
      return
 7000 format(i3,1p6e12.4)
 7010 format(1p6e12.4)
 9000 format('program error found at s_calc_disp_01',/,
     1       i6,1p6e12.4)
      end
```

```
      subroutine s_calc_disp_02
     1                 (ene    , s_k    , mass   , z_tk   , x      , y      ,
     2                  x1     , y1     , gam    , nyu    , lam    , dis_g ,
     3                  cc     ,
     4                  ip     , iq     , ny     , nn     , mm     , i_shif)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     ene    , s_k    , mass   , z_tk   , x      , y      ,
     1           x1     , y1     , gam    , nyu    , lam    , dis_g ,
     2           cc
      integer*4  ip     , iq     , ny     , nn     , mm     , i_shif
      real*8     yy     , ws_k   , pi_t   , d_pi_t
      integer*4  iy
c*
c*
      dimension  ene (ny)
      dimension  s_k (ny)
      dimension  mass(ny)
      dimension  z_tk(ny)
      dimension  x   (nn)
      dimension  y   (nn)
      dimension  x1  (mm)
      dimension  y1  (mm)
c*
c*
      ws_k = 0.d0
      do iy = 1, ny
c*    do iy = 2, 2
        yy = ene(iy)+gam
        ws_k = max(ene(iy),ws_k)
        call s_calc_full_pi_t
```

```
     1              (yy    , ws_k  , pi_t  , d_pi_t, x     , y     ,
     2               x1    , y1    , lam   , nyu   , dis_g , cc    ,
     3               ip    , iq    , nn    , mm    , i_shif)
        s_k (iy) = ws_k
        mass(iy) = sqrt(pi_t)
        z_tk(iy) = 1.d0/(1.d0+d_pi_t)
c*      write(6,7000) iy, s_k(iy), mass(iy), z_tk(iy)
      end do
c*
c*
      return
 7000 format(i2,1p6e12.4)
 9000 format('program error found at s_calc_disp_02',/,
     1       i6,1p6e12.4)
      end
```

```
      subroutine s_set_ans
     1                 (d      , p      , ip      , n      )
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8    d      , p
      integer*4 ip     , n
c*
      dimension d(n)
c*
c*
      d(ip) = p
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_output_x(nam_in)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      character*256 nam_in
      character*256 flname, msg
      integer*4     numbfl
      parameter    (numbfl = 80)
      integer*4     i_form, i_stat
      parameter    (i_form = 0, i_stat = 1)
      integer*4     len_s , len_e , len1  , len2
c*
c*
      include 'zzcnst'
      include 'zzcntl'
      include 'zzpara'
      include 'zzwork'
c*
c*
      call s_lenx(nam_in, len_s , len_e )
c*
c*
      call s_c256(msg   )
      call s_c256(flname)
      msg = '_rsl.csv'
      call s_lenx(msg   , len1  , len2  )
      flname = nam_in(len_s:len_e)//msg(len1:len2)
c*
c*    ----- open result file -----
      call s_flopn(flname, numbfl, i_form, i_stat)
c*
      call s_output_1
```

```
     1            (rda(krp(   1)), rda(krp(   2)), rda(krp(   3)),
     2             rda(krp(   4)), rda(krp(   5)), r_mesh, numbfl)
c*
c*    ----- close result file -----
      call s_flcls(numbfl)
c*
c*
      return
      end
```

```
      subroutine s_output_1
     1                 (x      , y1    , y2    , y3    , y4    ,
     2                  nn     , numbfl)
c----------------------------------------------------------------------c
c                                                                      c
c                                                                      c
c                                                                      c
c----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      real*8     x     , y1    , y2    , y3    , y4
      integer*4  nn    , numbfl
      integer*4  i_rho
c*
      dimension x (nn)
      dimension y1(nn)
      dimension y2(nn)
      dimension y3(nn)
      dimension y4(nn)
c*
c*
      do i_rho = 1, nn
        write(numbfl,7000) x(i_rho), log10(x(i_rho)),
     1                     y1(i_rho), y2(i_rho), y3(i_rho), y4(i_rho),
     2                     log10(y1(i_rho)+y3(i_rho)),
     4                     log10(abs(y2(i_rho))+abs(y4(i_rho)))
      end do
c*
c*
      return
c7000 format(1pe12.4,0p5(',',f8.4))
c7000 format(1pe12.4,',',0pf8.4,1p4(',',e12.4))
 7000 format(1pe12.4,',',0pf8.4,1p4(',',e12.4),0p2(',',f9.4))
 7010 format(f8.4,6(',',f8.4))
 7020 format(1pe12.4,0p14(',',f8.4))
      end
```

```
      subroutine s_flcls(numbfl)
c-----------------------------------------------------------------------c
c                                                                       c
c                                                                       c
c                                                                       c
c-----------------------------------------------------------------------c
c
      implicit none
c*
c*
      integer*4 numbfl
c*
c*
      close(numbfl)
c*
c*
      return
      return
      end
```

参考文献

[1] Beaudet, G., Petrosian, V., & Salpeter, E. E. 1967, ApJ, 150, 979

[2] Dicus, D. A. 1972, Phys. Rev. D., 6, 941

[3] Itoh, N., & Kohyama, Y. 1983, ApJ, 275, 858

[4] Itoh, N., Matsumoto, N., Seki, M., & Kohyama, Y. 1984, ApJ, 279, 413

[5] Itoh, N., Kohyama, Y., Matsumoto, N., & Seki, M. 1984, ApJ, 280, 787

[6] Itoh, N., Kohyama, Y., Matsumoto, N., & Seki, M. 1984, ApJ, 285, 304

[7] Itoh, N., Nakagawa, M., & Kohyama, Y. 1985, ApJ, 294, 17

[8] Munakata, H., Kohyama, Y., & Itoh, N. 1985, ApJ, 296, 197

[9] Kohyama, Y., Itoh, N., & Munakata, H. 1986, ApJ, 310, 815

[10] Schinder, P. J., Schramm, D. N., Wiita, P. J., Margolis, S. H., & Tubbs, D. L. 1987, ApJ, 313, 531

[11] Nakagawa, M., Kohyama, Y., & Itoh, N., 1987, ApJ, 63, 661

[12] Munakata, H., Kohyama, Y., & Itoh, I. 1987, ApJ, 316, 708

[13] Itoh, N., Adachi, T., Nakagawa, M., & Kohyama, Y. 1989, ApJ, 339, 354

[14] Itoh, N., Kojo, K., & Nakagawa, M. 1990, ApJS, 74, 291

[15] Young, D. A., Corey, E. M., & DeWitt, H. E. 1991, Phys. Rev. A, 44, 6508

[16] Itoh, N., Mutoh, H., Hikita, A., & Kohyama, Y. 1992, ApJ, 395, 622

[17] Braaten, E., & Segel, D. 1993, Phys. Rev., D48, 1478

[18] Kohyama, Y.,Naoki, I., Obama, A., & Mutoh, H. 1993, ApJ, 415, 267

[19] Kohyama, Y., Itoh, N., Obama, A., & Hayashi, H. 1994, ApJ, 431, 761

[20] Haft, M., Raffelt, G., & Weiss, A. 1994, ApJ, 425, 222

[21] Itoh, N., Hayashi, H., Nishikawa, A., & Kohyama, Y. 1996, ApJ, 102, 411