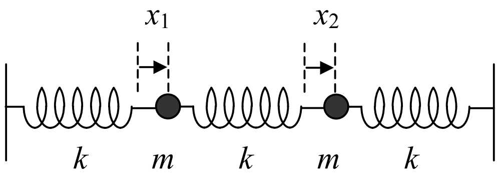
1複数の質点の振動

Goal－座標変換

2やさしい具体例



つりあいの位置からのずれ

という三つのバネと二つの質点の系を考えよう。各質点の位置の平衡位置からの

右向きへのずれを x_1, x_2 とすれば、

運動方程式は、両側のバネの力を足し合わせると、

$$
\begin{cases}
m\ddot{x}_1 = \overbrace{-kx_1}^{\text{左のバネ}} \quad \overbrace{+k(x_2-x_1)}^{\text{真ん中のバネ}} \\
m\ddot{x}_2 = \underbrace{k(x_1-x_2)}_{\text{真ん中のバネ}} \quad \underbrace{-kx_2}_{\text{右のバネ}}
\end{cases}
$$

となる。定数 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ を導入して、整理すれば

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1 = \omega_0^2(-2x_1 + x_2) \\
\ddot{x}_2 = \omega_0^2(+x_1 - 2x_2)
\end{cases}
$$

となるが、変数が二つなのでちょっと難しそうだ。しかし、若いころに習った「加減法」を

思い出しながら、二式の両辺の和と差をとると、

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\omega_0^2(x_1 + x_2) \\
\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -3\omega_0^2(x_1 - x_2)
\end{cases}
$$

何という偶然。両辺とも同じ変数の組み合わせになった。

つまり、$X \equiv x_1 + x_2$，$Y \equiv x_1 - x_2$ とおけば

$$
\begin{cases}
\ddot{X} = -\omega_0^2 X \\
\ddot{Y} = -3\omega_0^2 Y
\end{cases}
$$

となり、それぞれ、別の変数を持つ「独立な」方程式だ。

これらは別々に解くことが出来て、

$$\begin{cases} X = A\sin(\omega_0 t + \phi) \\ Y = B\sin(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \quad \text{または、} \quad \begin{cases} X = \mathrm{Re}\, A e^{i(\omega_0 t + \phi)} \\ Y = \mathrm{Re}\, B e^{i(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi)} \end{cases}$$

4＝２階微分×２変数

となる。ここで、積分定数は $A, B, \phi, \ \varphi$ の四つだ。

もう一度、二つの方程式は独立であることに注意しておこう。

（言い換えると、 X, Y はお互いに無関係であるということだ）

3 新しい変数の物理的意味

$X \equiv x_1 + x_2$, $Y \equiv x_1 - x_2$ として導入した新しい変数の意味を考えよう。

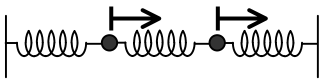
新変数 X（正確には $X/2$）は二つの質点位置の重心だ。$X \equiv \dfrac{mx_1 + mx_2}{m+m} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

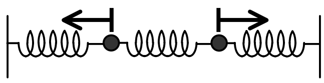
Y は、相対位置 $Y \equiv x_1 - x_2$ だ。Y の変化は、伸縮運動だ。

※先ほど見たように、X,Y は独立（無関係）なので、

重心位置 X の振動だけ大きくしても、伸縮運動 Y の振動は元のままだし、

伸縮運動 Y を大きくしても、重心位置 X の振動は元のままだ。





元変数 元の二つの質点の座標は、X, Y の定義式を逆に解いて、

$$\begin{cases} x_1 = C\sin(\omega_0 t + \phi) + D\sin(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \varphi) \\ x_2 = C\sin(\omega_0 t + \phi) - D\sin(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

となる。C, D, ϕ, φ は任意定数（もちろん、$C = \frac{1}{2}A,\ D = \frac{1}{2}B$ と書いても良い）。

※元の質点に帰って見ると、x_1, x_2 は独立ではないので、

x_1 をゆらすと、x_2 の運動は変わるし、

x_2 をゆらすと、x_1 の運動が変わる。

4 一般的な場合。

今の例は偶然、解けたわけだ。一般的にはどうやるか考えよう。

4-1 三つの質点が並んだ問題 ├─●─●─●─┤

落ち着いて、左右のバネの力の和を計算すれば、

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \omega_0^2\left(-x_1 + (x_2 - x_1)\right) \\ \ddot{x}_2 = \omega_0^2\left((x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)\right) \\ \ddot{x}_3 = \omega_0^2\left((x_2 - x_3) - x_3\right) \end{cases}$$

整理して、
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \omega_0^2\left(-2x_1 + x_2\right) \\ \ddot{x}_2 = \omega_0^2\left(x_1 - 2x_2 + x_3\right) \\ \ddot{x}_3 = \omega_0^2\left(x_2 - 2x_3\right) \end{cases}$$

4-2 N 個の場合 ├─●─●─ …… ─●─┤

x_i は平衡位置からのずれの座標

これも落ち着いて和を取るだけだ。

左端の質点 x_1 にかかる力

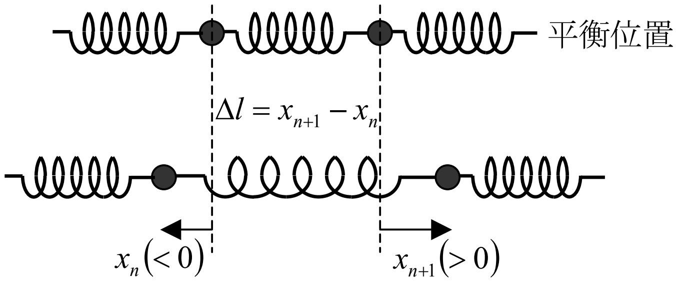
・左のバネの平衡長さからのずれ＝ x_1 （左側は壁なので動かない）

・右のバネの平衡長さからのずれ＝ $x_2 - x_1$ （両側の質点とも動く）

n 番目の質点 x_n にかかる力

・左のバネの平衡長さからのずれ＝ $x_n - x_{n-1}$

・右のバネの平衡長さからのずれ＝ $x_{n+1} - x_n$

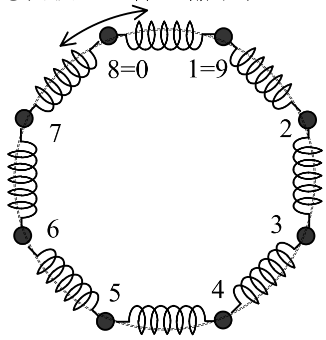


以上を整理すると、

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \omega_0^2\left(-2x_1 + x_2\right) \\ \ddot{x}_2 = \omega_0^2\left(x_1 - 2x_2 + x_3\right) \\ \qquad\vdots \\ \ddot{x}_N = \omega_0^2\left(x_{N-1} - 2x_N\right) \end{cases}$$

となる。

質点は円周上を動く
バネも円弧上で伸び縮みする



4-3 リング上に配列した質点

この場合だと、「端」が無くなり全ての質点が同等になる。

運動方程式は、

$$-k\left(x_i - x_{i+1}\right) + k\left(x_{i-1} - x_i\right) - m\ddot{x}_i = 0 \qquad (i = 1 \ldots N)$$

$$\therefore \ddot{x}_i = \omega_0^2\left(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}\right)$$

となる。但し、一周廻ったところは同じなので、$x_{N+1} \equiv x_1$, $x_N \equiv x_0$ と思うことにすると、

全ての運動方程式を同じ形に書ける（x_1 や x_N だけ別に書かずに済む）。

【余談】これは、『周期境界条件』と言われ、これから、しばしば登場するだろう。

5 行列

以上の結果を一般的に書くためには行列の力を借りると非常に美しくできる。

5-1 まずリングでは、

$x_N = x_0$ からの寄与

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_{N+1}$ からの寄与

5-2 両端固定

ここは壁に固定されているので常にゼロに固定

$$
\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}
$$

ここも壁に固定

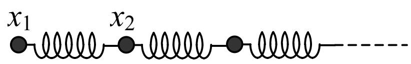
5-3 自由端

左端の質点の接続相手が右だけで、左側は自由端の場合(壁につながっていない)

ここが自由端なので右側のバネの寄与のみ

$$
\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}
$$

——左側 x_1 のみ自由端



x_1 に働く力は右側のバネのみ。
$f = k \cdot (x_2 - x_1)$

となる。

・右端も自由端なら、行列の右下の成分(NN 成分)が、-2 から-1 に変わる。

5-4 バネと質点が自由に繋がった一般的な場合

ちょっと考えれば

繋がった先の質点のずれによる力

自分自身のずれによる力

イ) 他の質点とつながっているところに 1 を入れる

ロ) 各行(各列でも良い)の全バネ接続数(壁も含む、自由端は含まない)

をマイナスの符号にしたものを対角成分に書く

ハ) バネ定数が異なる場合は、イ、ロ)で、1 ではなく、バネ定数を入れる

ニ) 質点の質量がいろいろある場合は、左辺の $\ddot{x}_i$ を $m_i \ddot{x}_i$ と置き換え

というきまりで、行列を書けば良いことがわかる。

6 固有ベクトル

N 本の等式による座標変換

$x_1 = C_{11}x'_1 + C_{12}x'_2 + \cdots + C_{1N}x'_N$

$\vdots$

$x_N = C_{N1}x'_1 + C_{N2}x'_2 + \cdots + C_{NN}x'_N$

これまでの結果をベクトル形式で書くと、

$$\ddot{\vec{x}} = \omega_0^2 A\vec{x}$$

だ。ここで A を対角化する。つまり、行列 C に対して $\vec{x} = C\,\vec{x}'$ とおいて代入すると、

$$C\ddot{\vec{x}}' = \omega_0^2 AC\vec{x}'$$

$$\therefore \ddot{\vec{x}}' = \omega_0^2 C^{-1}AC\vec{x}'$$

$C^{-1}AC$ が対角化されるようにうまく C を選ぶと、

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}'_1 \\ \ddot{x}'_2 \\ \ddot{x}'_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}'_N \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \vdots \\ x'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2\beta_1 x'_1 \\ -\omega_0^2\beta_2 x'_2 \\ -\omega_0^2\beta_3 x'_3 \\ \vdots \\ -\omega_0^2\beta_N x'_N \end{pmatrix}$$

となり、各等式を分けて書くと、

$\left\{\ddot{x}'_i = -\omega_0^2\beta_i x'_i\right\}_{i=1-N}$ と N 本の一変数微分方程式に分解された。

これは単振動の方程式なので簡単に解くことができて、

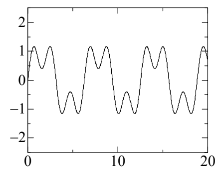
$x'_i = D_i \sin\left(\sqrt{\beta_i}\,\omega_0 t + \phi_i\right)$ となる(D_i 及び ϕ_i は積分定数)。

7 元の変数に戻す

$\vec{x} = C\,\vec{x}'$ に代入すればよくて、結果は、$i = 1 \sim N$ についてそれぞれ、

$$x_i = C_{i1}D_1\sin\left(\sqrt{\beta_1}\,\omega_0 t + \phi_1\right) + C_{i2}D_2\sin\left(\sqrt{\beta_2}\,\omega_0 t + \phi_2\right) + \cdots + C_{iN}D_N\sin\left(\sqrt{\beta_N}\,\omega_0 t + \phi_N\right)$$

と、いくつかの振動数の重ね合わせになることがわかる(右図)。



なお、固有値 $-\beta_i$ は必ず実数で負になるはずだ($\omega_i^2 = -\beta_i > 0$)。

これは、摩擦を考えていないから、振動が減衰しないことに対応する。

※バネと複数の質点の問題に出て来る行列（C ではなく、対角化される方）の固有値が必ず実数で、負になることは、線型代数で証明できる（実対称行列、負定値行列）。負定値の証明は難しいかも。

8 基準座標と基準振動数

ここで、$\omega_i = \beta_i \omega_0$ は「基準振動数」、基本ベクトル x'_i は「基準座標」と呼ばれる。

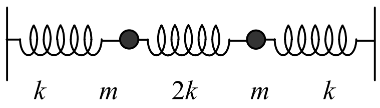
$$x'_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} x_j \ = \text{「独立した調和振動子の集まり」} \ (\omega_i = \omega_0 \beta_i)$$

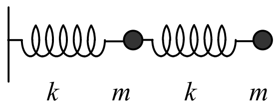
元の座標 x ： 相互作用している複数の質点をちょっとゆすってやると、他の粒子もゆれだすので、非常に難しい問題に見える。

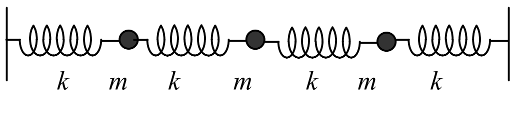
基準座標（きじゅんざひょう） x' : 旨く基準座標を選んでやると、独立な調和振動の重ね合わせとして表せるので、非常に簡単になる。

※量子力学 (ただ、最初に習う量子力学は 1 つの電子の運動なので「簡単」だ)を含めて、多くの物理の問題は、この基準座標を如何に見つけるか、という点に尽きるといっても過言（かごん）ではない。

9 練習問題







左は 2000 年度の大学院入試問題

※解いてみよう。

10 リング状の問題を具体的に解く方法

多次元の行列を対角化する具体的方法は、ヤコビ法や、ハウスホルダー法、など、いくつかのコンピュータプログラムが開発されている。

手計算では N 次方程式を解く必要があり、一般的には難しい問題（2~3 次元が限度）。

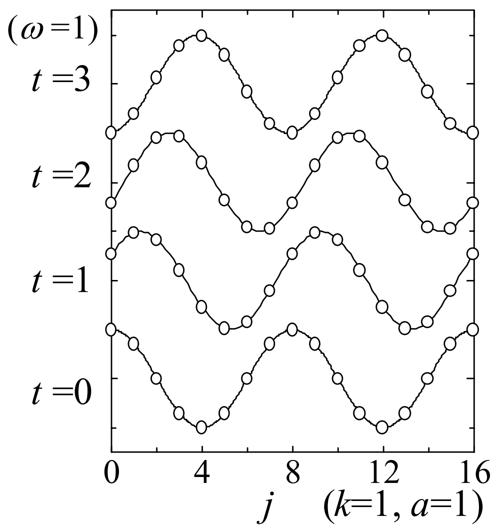
しかし今のリング状の場合、規則的に

つながっているということから、解 $x_j(t)$ を、

$x_j(t) = Ce^{i\omega t - ikaj}$ （$\mathrm{Re}\, x_j = C\cos(\omega t - kaj)$ ）

(a は質点の間隔、k, ω は任意定数)

つまり 「波」 であると仮定してみる(右図)。



$\mathrm{Re}\, x_j = C\cos(\omega t - kaj)$ が時間 t とともに、どのように変化するかを表した。
時間とともに、右(j が増える方向)に進む。k が負だと、左に進む。

これを運動方程式 $\ddot{x}_i = \omega_0^2(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$

に代入してみると、行列の対角化を行わなくとも

解けることがわかる。

実際、代入してみると、

$$\underbrace{\ddot{x}_j = -C\omega^2 e^{i\omega t - ikaj}}_{\text{左辺}} = \underbrace{C\omega_0^2(e^{ika} - 2 + e^{-ika})e^{i\omega t - ikaj}}_{\text{右辺}}$$

$$\therefore -\omega^2 = \omega_0^2(2\cos ka - 2) = 2\omega_0^2(\cos ka - 1) = -4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\because \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\therefore \omega = 2\omega_0 \sin\frac{ka}{2}$$

両者の比例係数が波の速度 υ なのだ。

という 「条件」 が出て来る。

※この条件は、ω と k が勝手な値を取れないことを意味している。

11 周期的境界条件

さらに「リング状につながっている」、ということから、$x_i = x_{i+N}$ のはずだ (このことを「周期的境界条件」と呼ぶ。これからしばしば出て来るであろう)。

すると、$x_j = Ce^{i\omega t - ikaj} = Ce^{i\omega t - ika(j+N)} = x_{j+N}$ なので、$e^{-ikaN} = 1$ だ。

$1 = e^{2\pi ni}$ を思い出すと、$ka = \dfrac{2\pi n}{N}$ $(n = 0 \ldots N-1)$ となり、k も、ある範囲内に限定される。

範囲外の k は結局、同じ x_j を与える。

例えば、$M=N$ だと、$ka=2\pi$ になって、$ka=0$ と全く同じだ（$\because e^{-2\pi i}=1$ ）。

⇒ 解が N 個しかない、ということは N 次行列の固有値が N 個であることに対応。

以上より、$x_j(t)=\mathrm{Re}\,Ce^{i\omega t-ikaj}$ の表式に、

$$k_n a=\frac{2\pi n}{N}\quad(n=0\ldots N-1)$$

$$\omega_n=2\omega_0\sin\frac{k_n a}{2}=2\omega_0\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)$$

を代入したものが解で、N 個あることがわかる。つまり、

$$\begin{cases}x_j^{[0]}(t)=\mathrm{Re}\,Ce^{i\omega_0 t-ik_0 j}\\ x_j^{[1]}(t)=\mathrm{Re}\,Ce^{i\omega_1 t-ik_1 j}\\ \vdots\\ x_j^{[N-1]}(t)=\mathrm{Re}\,Ce^{i\omega_{N-1} t-ik_{N-1} j}\end{cases}\qquad(j=0\sim N-1)$$

バネの「のび」に
だけ着目すれば
どれも静止している
解なのだ

という N 個の解だ。なお、一番上(n=0)の $x_j^{[0]}=\mathrm{Re}\,C$ は、定数で、

「みんないっしょに回転している」という解だ。

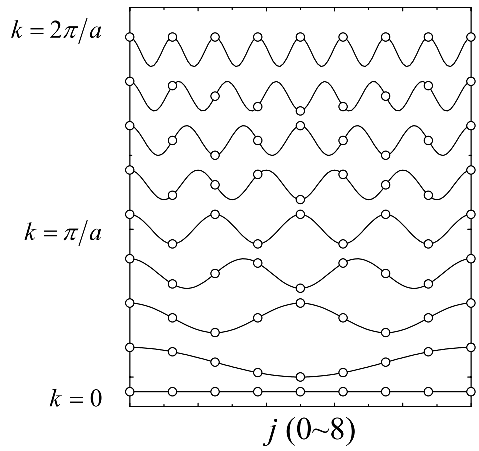
12 分散

長い列の場合、n が小さい場合、sin を展開すると

$$\omega_n=2\omega_0\sin\frac{k_n a}{2}\cong a\omega_0 k\quad となる。$$

これは$\upsilon\equiv a\omega_0$とすれば、$\omega=2\pi f=\upsilon k=\upsilon\frac{2\pi}{\lambda}$

となって、大昔に習った「波の速さ」の式だ。



波数 $k=2\pi/\lambda=0$～$2\pi/a$ まで変えて行ったときの、波の「瞬間写真」。
最上段の $2\pi/a$ は質点の動きにだけ注目すると 0 の場合と同じだ。驚け！

しかし、M が大きくなると、等号が成り立たなくなり、

だんだん振動数が小さめになってくる。

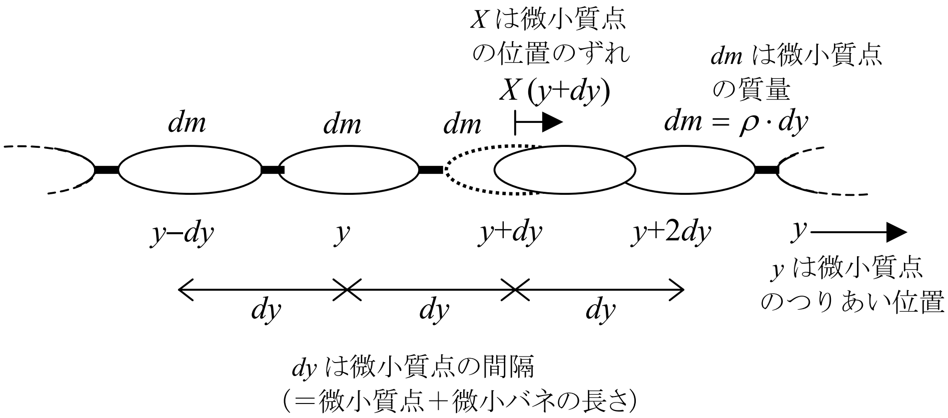
そして、M=N/2 すなわち $k=\pi/a$ のところ

(そこでは一つ一つ互い違いに振動している。これ以上「細かい」振動はあり得ない！)

で、最大値 $\omega=2\omega_0$ を取ったあと、また下がって行く。

※昔習った波の速さの式$\upsilon = \lambda f$はいつでも成り立つわけではないことを覚えておこう。

（$\upsilon = \lambda f$がいつでも成り立つのは、真空中を伝わる電磁波（光）だけ。）



13 棒を伝わる縦波

質点の大きさをどんどん小さくして、そして、数 N を∞にしたらどうなるか。

微小質点の座標のずれを X_i と書くと、運動方程式は、

$m\ddot{X}_i = k\left(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}\right)$ となる。

ここで、添字 i は質点同士の間隔が小さいのだから、連続的な「座標」で書いてよい。

よって $i, i+1, i+2, \ldots$を、$y, y+dy, y+2dy$ と書こう。

y＝座標（つりあいの状態 $X = 0$ の時の微小質点の座標。）

X＝質点の変位（位置のずれ）

質点の質量も微小だから、dm と書く。すると、

$dm\ddot{X}(y) = k\left(X\left(y-dy\right) - 2X\left(y\right) + X\left(y+dy\right)\right)$ となるので、微分を使って書くと

$$dm\ddot{X}(y) = k\left(\frac{\partial X}{\partial y}\left(y-dy\right) - \frac{\partial X}{\partial y}\left(y\right)\right)dy = k\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\left(y\right)dy^2$$

単位長さあたりに含まれる質点の重さ(＝線密度)は $\rho = \dfrac{dm}{dy}$ なので、

$\rho\ddot{X}(y) = k\dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2}\left(y\right)dy$ を得る（まだ右辺に一つ微小量が残っている）。

14 ヤング率

右辺に微分 dy が残っているのは、「ばね定数 k」が、ばね長さ L に依存しているからだ。

バネ定数はバネの長さに比例する（中学校の理科の問題だ。急いで思い出せ）。

よって物質固有の延びやすさを表すには「バネの伸び ΔL の L に対する割合」を使った方がわかりやすい。この $\Delta L/L$ と、力との間の比例係数をヤング率と呼ぶ。

フックの法則より $F = k\Delta L = (kL)\dfrac{\Delta L}{L} = E\dfrac{\Delta L}{L}$

なので、$E = kL$ であることがわかる。

このヤング率を使うと、微小長さ dy と、その微小長さバネのバネ定数 k の積が

物質の固有の値になることがわかる。よって $\rho\ddot{X}(y) = k\dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2}(y)\,dy$ に代入すれば、

$\rho\ddot{X}(y,t) = E\dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2}(y,t)$ と、『波動方程式』が得られる。

くどいようだが、X は変位(バネの伸び)、y は座標(元の位置)だ。

１５ 波動方程式の解

$X = \mathrm{Re}\,Ae^{ikx-i\omega t+i\phi} = A'\cos\left(k\left(x-\dfrac{\omega}{k}t\right)+\phi\right)$ を波動方程式に代入する。

左辺 $\rho\ddot{X} = -\rho\omega^2 X$ 、右辺 $EX'' = -Ek^2 X$ であるので、 $\rho\omega^2 = Ek^2$ であれば、

確かに解になっていることがわかる。積分定数は A', ϕ 。

解は $f(x-at)$ の形をしている⇒確かに進行波（進む波） ⇔ 定常波 $\cos kx\cos\omega t$

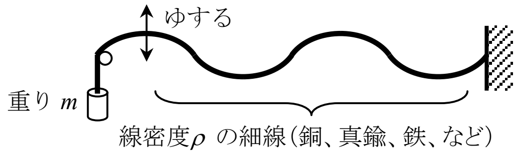
波の速さ $\upsilon = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ 。周波数と波数の関係 $\omega = k\upsilon$ を「分散」という。

16 学生実験の課題「定常波」

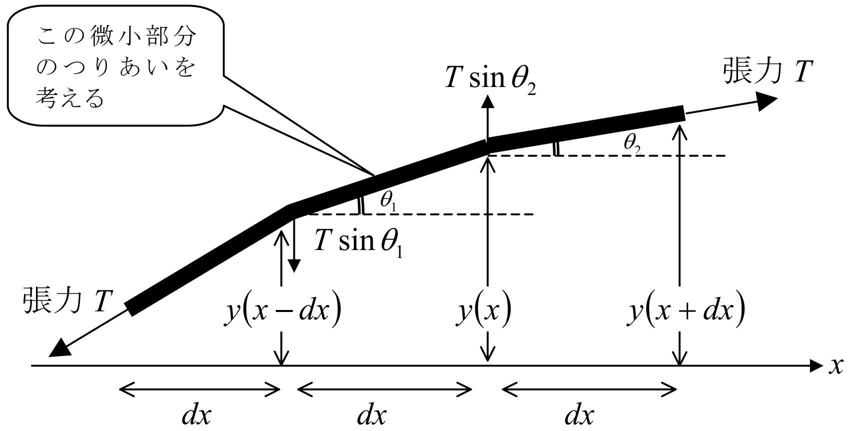
学生実験「定常波」での問題設定はこれとはちょっとだけ異なる。

イ）まず、弦の振動は横波で、微小部分は弦に対して垂直方向に揺れる。

物理学実験 I における課題
「定常波」のセットアップ



ロ）次に、弦の運動を支配している復元力は、ヤング率 E (弾性力＝バネの力)ではなく、両端の引っ張り F(張力)だ。つまり、弦はやわらかくてフニャフニャだと仮定しているのだ。よって、ヤング率 E の代わりに張力 T が入る。



真中の微小部分の上下の釣り合いを考える。$y(x)$は全て微小とする。

上下方向の加速度を a とすると、

$$F = dm\cdot a = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

$$= T\cdot(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = T\cdot\left(\frac{y(x+dx)-y(x)}{dx} - \frac{y(x)-y(x-dx)}{dx}\right)$$

$$\approx T\cdot(y'(x) - y'(x-dx))$$

関数 $y'(x)$ をテイラー展開すれば $y'(x-dx)\approx y'(x)+y''(x)(-dx)$ なので、

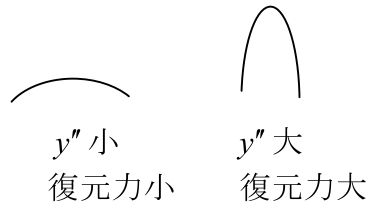
$$F = dm\cdot a \approx T\cdot y''(x)dx$$

ここで微小部分の質量 dm は線密度(kg/m)を用いて、$dm=\rho\,dx$ と書けるので、

【直感的理解】

二階微分は曲率(曲がり具合)を現すので、

を比べると、左の方が力が小さいことを示している。



【余談】ちなみに、膜の振動（二次元）や剛体（三次元）の振動だと、

「ラプラシアン」というものを計算する。これは、$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ で定義され、

膜や剛体の曲がり具合を表している。

17 波数と角振動数

波を表すパラメタとしては、今までは、波長λ(m)と周波数 f (Hz)が頭にあるに違いない。

しかし、これからは、波数 k と角周波数ωがよく使われる。定義は、単に、

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\ (\mathrm{m}^{-1}) \quad 及び \quad \omega = 2\pi f\ (\mathrm{rad/s})$$

でどういうこともないのだが、なぜ、一見わかりやすい、波長と周波数ではなく、直感的

でない波数と角周波数を使うのだろうか？ その理由がわかるともっと馴染めるだろう。

※理由は簡単で、単に、$\cos(kx - \omega t)$, $e^{-i\omega t + kx}$ のように、三角関数や

指数関数の中に入れたときに、簡単で美しい形になるからだ。

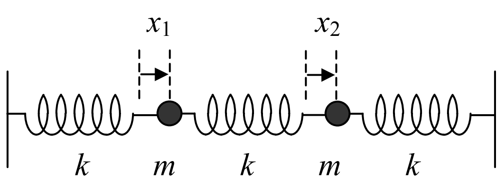
（λや f では $\cos(2\pi x/\lambda - 2\pi f t\ )$ のように、余計なπや分数が入る）

18 行列の対角化の例

念のため N=2 の例（両端壁固定）を行列を使って解いておく。

二つの質点の座標を $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とベクトルで表す。すると運動方程式は

$$\ddot{\vec{x}} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$



となるので、

$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ を対角化すれば良い。

A の固有ベクトルを $\vec{a}$、固有値を λ とすると、定義 $A\vec{a}=\lambda\vec{a}$ より、

$(A-\lambda E)\vec{a}=0$

である。ここで、行列 $A-\lambda E$ の行列式がゼロでないと、逆行列が存在して、

$(A-\lambda E)^{-1}(A-\lambda E)\vec{a}=\vec{a}=0$

となってしまうので、意味のある $\vec{a}$（ゼロ以外のという意味）が存在するための条件は、

$|A-E\lambda|=0$

となる。これを永年方程式(secular equation)と呼ぶ。

これを解くと、

$|A-I\lambda|=\left|\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}\right|=(2+\lambda)^2-1=0,\quad \therefore \lambda=\pm 1-2=-1,\ -3$

と固有値が求まり、さらに固有ベクトルを $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ とおけば、

$\lambda=-1$ のとき、$-1\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+b\\ +a-2b\end{pmatrix},\ \therefore a=2a-b,\ \therefore a=b$

よって、規格化して、$\vec{a}_{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda=-3$ のとき、$-3\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+b\\ a-2b\end{pmatrix},\ \therefore -3a=-2a+b,\ \therefore a=-b$

よって、規格化して、$\vec{a}_{-3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

と、固有ベクトル $\vec{a}_1,\vec{a}_{-3}$ も求まる。これらは規格直交化されている。

（規格化は自分でやったのだが、直交化は自動的だ）

基準座標は、この二つの固有ベクトルを新しい基本ベクトルとして座標変換すればよく、

そのためには、$\vec{x}' = C\vec{x} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_{-1} \\ {}^t\vec{a}_{-3} \end{pmatrix}\vec{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$ と置けばよい。

なお、$C = C^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である。$\because C$ は直交行列。

基準座標は $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ となる。

基準座標を元の運動方程式に代入すると、

$$\ddot{\vec{x}}' = \omega_0^{-2} C^{-1} A C \vec{x}' = \omega_0^{-2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}'$$

$$= \frac{\omega_0^{-2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}' = \frac{\omega_0^{-2}}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\vec{x}' = \omega_0^{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\vec{x}'$$

と対角化されている。