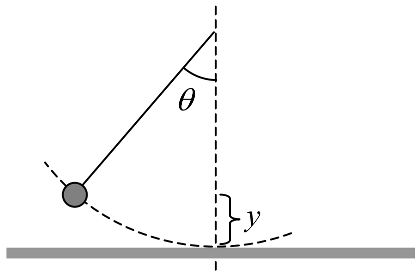
1 調和振動（＝単振動）Harmonic Oscillation



例）ばね $U=\dfrac{1}{2}kx^2$

例）振り子 $U=mgy=mgl\left(\cos\theta-1\right)$ 但し $\theta<<1$

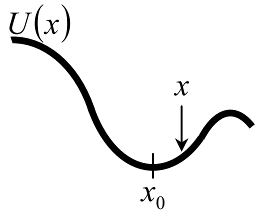
（さらに、前回やったように剛体振子も同じ）

どちらも単振動をする。解は $A\sin\left(\omega t+\phi\right)$ 　但し A 振幅、ϕ 位相は定数。

※「位相」の意味は、$\omega\left(t-t_0\right)$ と考えれば、「時間の原点」だ。

なぜ二つの例は同じ単振動なのか。どうして単振動は頻繁に物理に出現するのか？

【理由】ポテンシャルの極小値の周りでの振動だから。



どんなポテンシャルでも
極小値の近くでは単振動

極小値のまわりのテイラー展開は必ず二次から始まる。

∵一次の項が残っていたら極小にならない

$$U(x)=U(x_0)+\frac{k}{2}(x-x_0)^2+\cdots$$

極小値の値 x_0 を座標の原点に取れば、$U(x)=U(0)+\dfrac{kx^2}{2}+\cdots$

⇒ 振幅が小さければどんなポテンシャルでも調和振動

∴力はポテンシャルの勾配なので、$f=-\dfrac{dU}{dx}=-kx$

∴運動方程式は $m\ddot{x}=f=-kx$、解は上に書いた通り $A\sin\left(\omega t+\phi\right)$。

2 指数関数の解

解 $x=Ae^{i(\omega t+\phi)}=A\cos\left(\omega t+\phi\right)+iA\sin\left(\omega t+\phi\right)$ も同じ微分方程式を満たす。

(∵Im が sin でこれも微分方程式を満たすから)

よって、最後に実部 Re を取ることにすれば途中の計算が簡単になる。

【簡単になる理由】

微分すると三角関数は $\sin'=\cos$ と形が変わるが、

指数関数は、$e'=e$ と同じ（定数倍されるだけ）だから

3 摩擦がある場合の振動

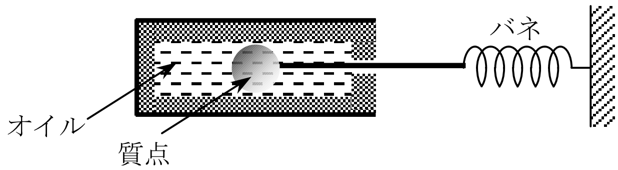
【注意】摩擦は力学では説明できない —— 摩擦は、運動を熱に変える過程。

⇒力学の枠組みを超えた話。量子力学、流体力学、熱力学などが必要。

ここでは近似的に $f_{\mathrm{T}} = -\alpha\dot{x}$ と書けるような摩擦力を考えよう。

イメージとしては、右図のように

油の中を動く質点だ。



図はショックアブソーバとかダンパーと呼ばれ、
車のサスペンションなどに用いられる

【注】高校でやったのは $f_{\mathrm{T}} = -\alpha$ だった。これは質点が動き出すと、摩擦力が最大静止摩擦力

から動摩擦力（速度によらず一定）へ突然変化するという仮定。「クーロンの法則」と呼ばれる経験則。

※シャルル・ド・クーロン（1736-1806）は電気、磁気、摩擦など、広範囲に活躍した物理学者

運動方程式は $m\ddot{x} = -kx + f_{\mathrm{T}} = -kx - \alpha\dot{x}$ となる。

式を簡単にするために定数を書き換えよう。

m で割って、$\ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{\alpha}{m}\dot{x}$

新しい定数を、$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ （ω_0 は摩擦の無いときの角速度）、$2\lambda = \dfrac{\alpha}{m}$ とおけば、

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ が得られる。

homogeneous linear
differential equation

4 摩擦のある振動の問題（斉次線型微分方程式）を解く。

これは線形微分方程式で非斉次項（inhomogeneous term）がないので簡単に解ける。

（線形とは＝全部の項が x の一次式、 非斉次項とは＝ x を含まない項）

一番簡単な解き方は $\boxed{x = e^{rt}}$ とおいて代入して r を決めれば良い。

⇒ 最終的に解が求まった段階で $\mathrm{Re}\,x$ を答にする

注）もちろん、$\mathrm{Im}\,x$ も解になっている。

⇒ 振動する部分は r の虚数部分から来るし、

振動せずに減ったりするのは実数部分から出る。心配するな。

実際、代入すると、

$r^2e^{rt}+2\lambda re^{rt}+\omega_0^2e^{rt}=0$ より、e^{rt} で両辺を割れば、

$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$ という方程式を得る。これを特性方程式というが、名前なんてどうでも良い。

これを r について解けば、

$$r_\pm=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}=\lambda\pm\omega \qquad 但し\ \omega\equiv\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$$

と二種類の r の値が許されることになる。　⇦ これ以外の r は絶対に許されない

よってとりあえず、e^{r_+t}, e^{r_-t} の二つは解であることがわかった。

5 一般解

解はこの二つだけだろうか？ — 答えは No.

すぐわかるように、定数倍した $c_+e^{r_+t}$ ， $c_-e^{r_-t}$ も解だ（$c_\pm$ は任意の定数）。

さらに、この二つを足し合わせた $c_+e^{r_+t}+c_-e^{r_-t}$ も解だ。

注）どんな微分方程式でも『解の和も解』となっているわけではない。線形微分方程式のみにで成り立つ性質。

よって一般解は、$c_\pm$ を定数として、$x=\mathrm{Re}\left(c_+e^{r_+t}+c_-e^{r_-t}\right)$ となる。

注）一般解とは —— $c_\pm$ をいろいろ変えれば全ての解を網羅している

※この話は、だいぶ以前(kiso01.pdf)にやった。定数が二つ($c_\pm$)なのは二階微分方程式だから。

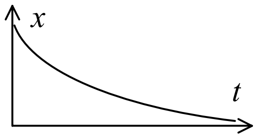
6 三つの場合分け— λ^2 と ω_0^2 の大小関係(摩擦が大きいか小さいか)

※別に場合わけしなくとも、解の形 $x=\mathrm{Re}\left(c_+e^{r_+t}+c_-e^{r_-t}\right)$ は共通なのだが、

わけて考えると、どういう状態になっているのか見えて来る。

三角関数で計算する場合は絶対に場合分けが必要になってとっても面倒。

6-1 $\lambda^2 > \omega_0^2$ の場合



$r_\pm$ の解が実数 $r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm \omega$ なので解は指数関数

ここで根号の値は λ より小さいので $r_\pm$ はいつでも負。

$\therefore \mathrm{Re}\, x(t) = \mathrm{Re}\left(c_+ e^{r_+ t} + c_- e^{r_- t}\right) = c_+ e^{r_+ t} + c_- e^{r_- t}$ つまり減衰する二つの指数関数の和。

6-2 $\lambda^2 < \omega_0^2$ の場合

$$r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm i\underbrace{\sqrt{\left|\omega_0^2 - \lambda^2\right|}}_{\omega} \equiv -\lambda \pm i\left|\omega\right|$$

と、 負の実数＋虚数 というかたちなので、減衰振動になるはず。

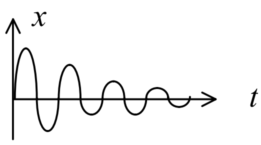
実際、$x = c_+ e^{r_+ t} + c_- e^{r_- t}$ にオイラーの公式を適用すれば、

$$\therefore \mathrm{Re}\, x = e^{-\lambda t}\left(c_+^R \cos\omega t - c_+^I \sin\omega t + c_-^R \cos\omega t + c_-^I \sin\omega t\right)$$

となるので、

$$c_1 = c_+^R + c_-^R,\quad c_2 = c_-^I - c_+^I$$

とおけば、



$$x = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\right) = e^{-\lambda t} A \sin(\omega t + \phi)$$

但し $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\phi = \arctan\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

という、わかりやすい形の一般解を得る。

このように、摩擦があると「動きにくくなって」振動数が ω_0 より小さくなる。

これは直感と一致する。直感と一致するかどうか確認することは大変重要だ。

※もちろん、直感と一致しない場合があるが、そういうときは、もっと重要だ。

7 重根の場合

ちょうど$\lambda = \pm\omega_0$の場合は$r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = \lambda \pm \underset{=0}{\omega} = \lambda$と重根となるので、素人には

$ce^{-\lambda t}$という一つの解しか見えない。ちょっと注意が必要だ。

$\lambda \to \pm\omega_0$の極限 (すなわち$\omega \equiv \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$が非常に小さい) を考えよう。

ここで、積分定数$c_+ = -c_-$と置いてみる(じつはこれがもう一つの解なのだ)。

すると、

$x = c_+\left(e^{+\omega t} - e^{-\omega t}\right)e^{-\lambda t} \cong c_+(1 + \omega t - 1 + \omega t)e^{-\lambda t} = 2c_+\omega t e^{-\lambda t}$

と、$\omega \to 0$の極限で消えてしまうので、解が一つしかないようにみえるのだ。

よって、消えないようにするために、積分定数$c_+ = -c_-$を大きくしてやる。

つまり、$c_+ = \dfrac{c'_+}{2\omega}$と置けば、もう一つの解、

$\lim_{\omega \to 0} c_+ \cdot \left(e^{+\omega t} - e^{-\omega t}\right) = 2c_+\omega t e^{-\lambda t} = c'_+ t e^{-\lambda t}$　を得る。

8【レポート問題】

$\omega_0 = 1$, $\lambda = 0,\ 0.3,\ 1,\ 3$について、

$t = 0 \sim 40\pi$くらいまでの範囲(千分割くらいにする)で解をグラフにしよう。

任意定数$c_\pm$はどちらも1として、二つの解を別々に描いて見るのが良いだろう。

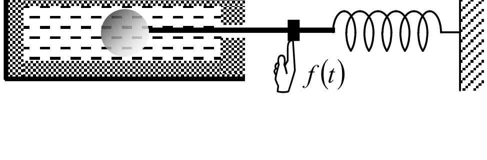
※余裕のある人は、前にやったファインマンの方法で$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$を

数値的に解いてみよう。

9 摩擦と外力がある場合の振動

外力—外から加えた力。手や機械でゆすってやるイメージ。$f = f(t)$とする。

$m\ddot{x} = \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\text{摩擦力}}\ \underbrace{-kx}_{\text{バネの力}}$



に、さらに、外力の項 $f\cos\omega_1 t$ を加えると $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x=\dfrac{f}{m}\cos\omega_1 t$ となる。

外力の振動数を ω_1
共鳴振動数を ω_0
と書くことが多い
（正しくは角周波数だけど、振動数と呼んでしまうこともある）

この式は、$\mathrm{Re}\left(\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{f}{m}e^{i\omega_1 t}\right)$ と全く同じ。

よって、さっきやったように、解 x は最後に実部を取ることにすると、

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{f}{m}e^{i\omega_1 t}$$

を解けばよいことになる。

＊注　もちろん、解の虚部 $\mathrm{Im}\,x$ も微分方程式を満たしている。

この微分方程式は、x の一次の式を含まない項が一つある。それは $f\cos\omega_1 t$ だ。

こういう項を「非斉次項」と言う。

10 非斉次線型微分方程式（inhomogeneous linear differential equation）の解法

非斉次項 $g(t)$ を含んだ微分方程式 $f(y)=g(t)$ の解法でオーソドックスなのは、

1) $f(y)=g(t)$ の特殊解(積分定数を含まなくとも良い)を見つける

2) $f(y)=0$ の一般解(必要数の積分定数を含んだ)を求める

$\Rightarrow$ n 階微分方程式は n 個の任意定数を含む

の二つの項の和として求めることだ。

2)はさっきやった。しかし、1) の特殊解はどうしたらよいだろうか。

一瞬、途方にくれてしまうかもしれないが、ともかく右辺は振動する項だから、

とにかく同じ振動数の解があるはずだ〔←今回の肝〕。

「なんともいいかげんな！」と思うかも知れないが、代入して確かめているので間違いはない。
慣れると結構、見つけられるようになる。

そこで、ともかく $x=Be^{i\omega_1 t}$ と置いて代入してみる。

【注意】B は定数だが、任意定数というわけではない。

すると、 $-\omega_1^2 B + 2i\lambda\omega_1 B + \omega_0^2 B = \dfrac{f}{m}$ となるので、

$$B = \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2i\lambda\omega_1\right)}$$ を得る。

つまり、たった今注意したように、B は任意ではなく、決められてしまう定数なのだ。

よって特解は $x = \operatorname{Re} B e^{i\omega_1 t}$ となる。

ここで、複素数 B を $B = B_0 e^{i\beta}$ のように、

絶対値 $B_0 = |B|$ と位相因子 $\beta = \arctan(B''/B')$ に分けて書けば、

解は、

$$x = \operatorname{Re}\left(B_0 e^{i(\omega_1 t + \beta)}\right) = B_0 \cos(\omega_1 t + \beta)$$

と大変わかりやすい形になる。

【発展問題】(必ずやること)
摩擦が無い($\lambda = 0$)場合の、
特解はどういう形になるか。
ヒント―釣鐘(つりがね)を小指で揺らす話
(釣鐘の動きに合わせて少しずつ揺らしていくとだんだん大きく振動しだす)

この解には二つの積分定数が含まれていないから、あくまで特殊解だ。

(B_0 も β も問題で与えられたパラメタ $f, m, \lambda, \omega_0, \omega_1$ で決まる)

一般解はこれに、外力が無い場合の一般解 $Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi)$ を加えてやれば、

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + B_0\cos(\omega_1 t + \beta)$$

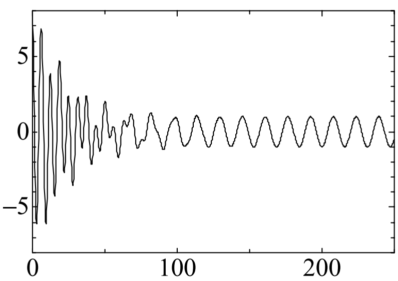
となる。初期条件 $x(0), \dot{x}(0)$ から決まる任意定数は $A,\ \phi$ だ。

なお、初項は時間と共に減衰して行くので、時間が十分経った後では

結局第二項(特解~外力に比例した振動)のみが残る。

右図は以下のパラメタで描画させた例。

$$A = 8, \lambda = 0.04,\ \omega = 1,\ \phi = 0,\ B_0 = 1, \omega_1 = 0.4,\ \beta = \pi/2$$



11 振幅の周波数依存性

摩擦が小さくて $\lambda < \omega_0$、かつ、共鳴点の近く $\delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, $|\delta\omega| \ll |\omega_0|$ では

$$B = \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2i\lambda\omega_1\right)} = \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - (\omega_0 + \delta\omega)^2 + 2i\lambda(\omega_0 + \delta\omega)\right)}$$

$$= \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - \left(\omega_0^2 + 2\omega_0\delta\omega + \delta\omega^2\right) + 2i\lambda(\omega_0 + \delta\omega)\right)}$$

となるので、高次の微小量($\sim \delta\omega^2$、$\lambda\delta\omega$)を捨てると、

$$B \cong \frac{f}{m(-2\omega_0\delta\omega + 2i\lambda\omega_0)}$$

$$= \frac{-f}{2m\omega_0(\delta\omega - i\lambda)}$$ となり、

振幅の絶対値は $B_0 = |B| = \dfrac{f}{2m\omega_0\sqrt{\delta\omega^2 + \lambda^2}}$ となる。

以上より、摩擦が小さいという近似の範囲では、

$\delta\omega = 0$、すなわち、外力の振動が共鳴点と完全に一致したところで振幅最大となる。

つまり、バネや振り子の共振周波数に近い周波数で揺すってやれば大きく揺れるということで、当たり前(直感と一致)のことだ。

12 位相のずれ

分母を実数化すると、$B = \dfrac{-f}{2m\omega_0(\delta\omega - i\lambda)} \propto -(\delta\omega + i\lambda)$ なので、位相因子は

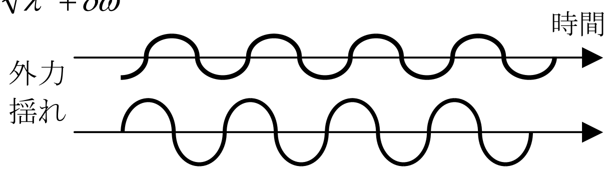
$\tan\beta = \dfrac{B''}{B'} = \dfrac{\lambda}{\delta\omega}$ である(但し、どの象限か注意。あとでやる)。

後で使うので $\sin\beta$ も求めておくと、

$\therefore 1 + \cot^2\beta = \sin^{-2}\beta$ より、

$$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\beta}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+(\delta\omega/\lambda)^2}} = \frac{\pm\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \delta\omega^2}}$$ (後で符号はマイナスであることがわかる)

となる。

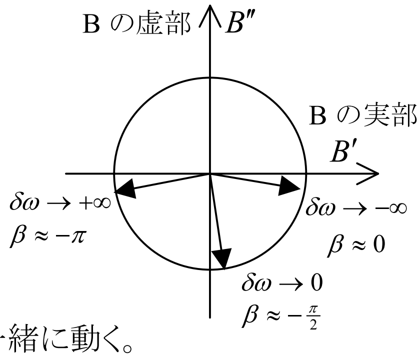


位相βの意味はfとxの振動のずれだ。

つまり、力を加えてもすぐには動かないのだ。

徐々に加速するので、座標位置は力に比べて遅れる。よって、位相のずれが生じる。

これもわかってみれば当たり前(＝直感・経験と一致)のことだ。



13 位相のずれと外力の周波数

$$B = \frac{-f}{2m\omega_0(\delta\omega - i\lambda)} \propto -\frac{\delta\omega + i\lambda}{\delta\omega^2 + \lambda^2}$$

より、βと$\delta\omega$の関係を求めてみよう。

・$\delta\omega \to -\infty$ ($\omega_1 << \omega_0$)ゆっくり ——→ $\beta \approx 0$ 外力と一緒に動く。

・$\delta\omega \to 0$ ($\omega_1 \approx \omega_0$)ちょうどぴったり —→ $\beta \approx -\pi/2$ 外力より遅れて動く。

・$\delta\omega \to +\infty$ ($\omega_1 >> \omega_0$)速い ——→ $\beta \approx -\pi$ 外力と逆に動く(慣性で静止)

以上のように$\beta = 0 \sim -\pi$なので、さっきやった$\sin\beta = \dfrac{\pm\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \delta\omega^2}}$の符号は負である。

14 摩擦があるのに振幅が減らないのはなぜか

摩擦があるにも関わらず、振幅B_0は時間に対して一定なのはなぜか。

これは、外力からエネルギーが供給されたことを意味している。

単位時間あたりの外部供給エネルギー$P = \delta W/\delta t = f(t)\delta x/\delta t$を計算してみよう。

注)外力のする仕事は$\Delta W = f\Delta x$

$x = B_0\cos(\omega_1 t + \beta)$, $f(t) = f\cos\omega_1 t$より、

$$f(t)\upsilon = f(t)\dot{x} = f\cos\omega_1 t \cdot \frac{-f}{2m\omega_0\sqrt{\delta\omega^2 + \lambda^2}}\left(-\omega_1\sin(\omega_1 t + \beta)\right)$$

となる。一周期分で平均すると、

$$\langle f(t)\upsilon\rangle = -\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{f^2\omega_1\cos\omega_1 t(\sin\omega_1 t\cos\beta+\cos\omega_1 t\sin\beta)}{2m\omega_0\sqrt{\delta\omega^2+\lambda^2}}$$

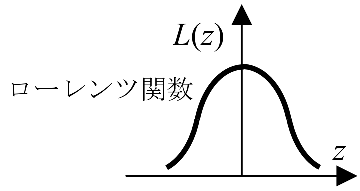
となり、一周期の積分で、$\cos^2\omega_1 t$ の項のみが残るので、

$$\langle f(t)\upsilon\rangle = -\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{f^2\omega_1\cos^2\omega_1 t\sin\beta}{2m\omega_0\sqrt{\delta\omega^2+\lambda^2}} = \frac{-f^2\omega_1\sin\beta}{2m\omega_0\sqrt{\delta\omega^2+\lambda^2}}\frac{1}{T}\underbrace{\int_0^T dt\cos^2\omega_1 t}_{T/2}$$

さっきやったように、位相のずれは $\sin\beta = \dfrac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\delta\omega^2}}$ なので、結局、

$$\langle f(t)\upsilon\rangle = \frac{f^2\omega_1\lambda}{4m\omega_0(\delta\omega^2+\lambda^2)} \approx \frac{f^2\lambda}{4m(\delta\omega^2+\lambda^2)}$$ （但し、$\delta\omega=\omega_1-\omega_0$ が小さい場合）

以上より、エネルギーの供給は $P=\dfrac{f^2}{4m\lambda}L(\delta\omega/\lambda)$



但し、$L(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ を「Lorentz 関数」と言う。

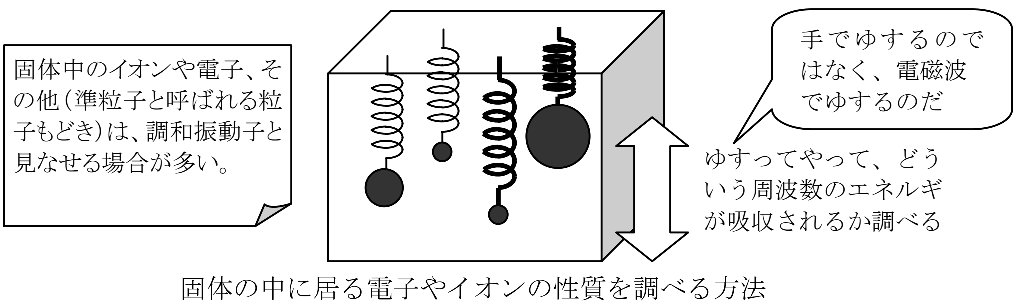
$\delta\omega=0$ すなわち、$\omega_1=\omega_0$ で揺さぶってやると、エネルギーの吸収が一番大きい。

１５ 箱の中の調和振動子

中が見えない箱の中の振動子の性質を知るには、箱を揺すってやってエネルギーの吸収が一番大きくなる周波数を調べてやればよい。

物質の中の原子や電子は、つりあいの位置を中心として振動していることが多い。

バネ定数にあたるものは、電気的な力(クーロン力)だ。結晶を電気的に揺すってやる(＝電磁波を照射)と、共鳴点の近くでエネルギーの吸収が大きくなる。どういう周波数の電磁波が吸収されやすいか調べると、結晶の中の電子や原子の性質がわかる。



固体の中に居る電子やイオンの性質を調べる方法