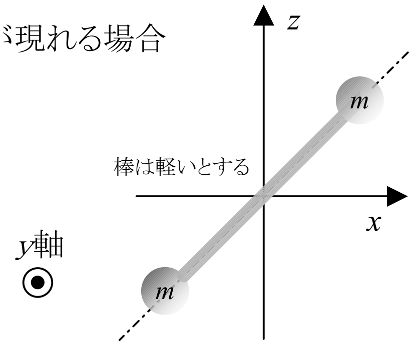
1慣性モーメントテンソルに非対角項（non-diagonal term）が現れる場合



棒に対して斜め方向を軸にして廻す

右図のような例を考えてみよう。
質点の位置は、$\vec{x}_1 = (a, 0, a),\ \vec{x}_2 = (-a, 0, -a)$ の二点。
どちらの質点も、

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$$
$$y = 0$$
$$x^2 = xz = z^2 = a^2$$

であることに注意すれば、

$$I = \sum_{i=1\sim 2} E r_i^2 - \begin{pmatrix} x_i x_i & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y_i y_i & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i z_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1\sim 2} E\, 2a^2 - \begin{pmatrix} x_i x_i & 0 & x_i z_i \\ 0 & 0 & 0 \\ x_i z_i & 0 & z_i z_i \end{pmatrix}$$

注）和は二項ともに作用する。念のため。

$$= 4a^2 E - \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & -2a^2 \\ 0 & 4a^2 & 0 \\ -2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \left(\sqrt{2}a\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 角運動量とエネルギー

定義 $\vec{L} = I\vec{\omega}$， $E = \frac{1}{2}\, {}^t\vec{\omega} I \vec{\omega}$ より、

$$\vec{L} = 2a^2 \begin{pmatrix} \omega_x - \omega_z \\ 2\omega_y \\ -\omega_x + \omega_z \end{pmatrix}$$

$$E = a^2 \left(\omega_x (\omega_x - \omega_z) + \omega_y (2\omega_y) + \omega_z (-\omega_x + \omega_z) \right)$$

$$= a^2 \left(\omega_x^2 - \omega_x \omega_z + 2\omega_y^2 - \omega_x \omega_z + \omega_z^2 \right) = a^2 \left(\omega_x^2 - 2\omega_x \omega_z + 2\omega_y^2 + \omega_z^2 \right)$$

3 線型代数の方法による行列の対角化
固有ベクトル $\vec{x}$ の定義 $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$
$\therefore (A - \lambda E)\vec{x} = 0$

もし、$A - \lambda E$ の逆行列が存在すると、$\vec{x} = 0$ になってしまう（左から $(A - \lambda E)^{-1}$ をかける）。

よって、$|A - \lambda E| = 0$ でないといけない $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$;det は行列式(determinant)

$\therefore (1-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)-0\cdot 0)-0+(-1)(0\cdot 0-(2-\lambda)(-1))=0$

よって、

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda)-(2-\lambda)=0$$

$$((1-\lambda)^2-1)(2-\lambda)=(\lambda^2-2\lambda)(2-\lambda)=0$$

$\lambda=0,2,2$ という固有値が得られた。これらは確かに、前回の結果と一致している。

4　固有ベクトル

まず、$\lambda=2$（重根）について、二つの固有ベクトルを求める。

$x-z=2x$

$2y=2y$　　という三つの方程式が得られる。真中は $y=y$ で自明な式。上下の式より、

$-x+z=2z$

$x=-z$ という関係が得られる。よって二つの固有ベクトルはどちらも $(a,b,-a)$ の形をしているはず。

規格化すると、$2a^2+b^2=1$ なので、$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\sin\theta,-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

二つの固有ベクトル $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\sin\theta,-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$、$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi,\sin\phi,-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)$

を直交するように選ぶと、

$\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi=\cos(\theta-\phi)=0$ より、<u>たとえば、</u>$\theta=0,\ \phi=\dfrac{\pi}{2}$　　（この「<u>たとえば</u>」は大事）

とすると、$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (0,1,0)$

これらと直交するように最後の固有ベクトルを決めると、三つ目の主軸は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる。

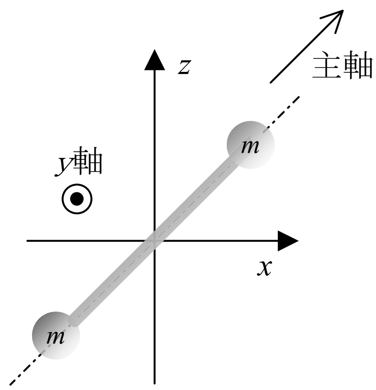
どうして<u>「たとえば」</u>だったかというと、棒に直交するならばどちらに主軸を取っても OK だから。

5　二次形式の平方完成による対角化

$$E=a^2\left(\omega_x^2-2\omega_x\omega_z+2\omega_y^2+\omega_z^2\right)=a^2\left((\omega_x-\omega_z)^2+2\omega_y^2\right)$$

よって、$\Omega_x=\dfrac{\omega_x-\omega_z}{\sqrt{2}},\ \Omega_y=\omega_y,\ \Omega_z=\dfrac{\omega_x+\omega_z}{\sqrt{2}}$ とおけば、

$$E=a^2\left(\Omega_x^2+2\Omega_y^2+0\cdot\Omega_x^2\right)$$



6　慣性主軸を対称性から直感的に求める方法での対角化

既にやった。棒に平行に軸を取れば I は対角化される。