どれも簡単な問題です（★は少しだけ難しい）。まわりに出来ない人がいたら助けてあげましょう。

0-1 $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2+1$としたとき、$f(g(x))$を求めなさい。

0-2 $f(\theta)=\sin\theta$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(y)=y^2+1$としたとき、$f(g(h(x)))$を求めなさい。

0-3 $\sin(x^2)$, $\sin(x^2+1)$, $\sin(1/x)$, $\sin\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$, $\sin(\cos x)$, $\sin(\log(x^2+1))$, $\log(\sin x)$, $e^{a/x}$, x^x を微分しなさい（合成関数の微分公式を使いなさい）。

0-4 $\int xe^{x^2}dx$, $\int\cos^2 x\sin x\,dx$, $\int\sin^4 x\cos x\,dx$, $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$ を積分しなさい（簡単な変数変換）。

0-5 以下のエネルギー（仕事）を計算しなさい

- 約 102g のものを 1m 上へ持ち上げるエネルギー
- 静止している 1kg のものを約 1.414m/s に加速するエネルギー
- 1W の電灯を 1 秒間だけ点灯するのに必要なエネルギー
- ばね定数$k=2\,\mathrm{N/m}$のばねを 1m 引き伸ばすのに必要なエネルギー

1 第一回

1-1 fを定数として$f=m\ddot{x}$を二回積分して$x(t)$を求め、二つの積分定数の意味を答えなさい。

1-2 $f=ax$の場合、$x(t)=e^{\sqrt{a/m}\,t}$と$e^{-\sqrt{a/m}\,t}$のいずれも$ax=m\ddot{x}$を満たすことを証明しなさい。

1-3 任意の定数A, Bに対して$x(t)=A\,e^{\sqrt{a/m}\,t}+B\,e^{-\sqrt{a/m}\,t}$が$ax=m\ddot{x}$を満たすことを証明しなさい。

1-4 $\cosh(x)$と$\sinh(x)$という関数を、$\cosh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{+x}+e^{-x}\right)$及び$\sinh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{+x}-e^{-x}\right)$と定義します。
$\cosh(x)'=\sinh(x)$, $\sinh(x)'=\cosh(x)$, $\cosh(x)''=\cosh(x)$, $\sinh(x)'=\cosh(x)$を証明しなさい
$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)$を計算しなさい。

2 第二回

2-1 関数x^3の$x=1$での傾きを求めなさい。xが、$x=1$から少しだけずれて$x=1+\varepsilon$（但し、$\varepsilon<<1$とします）となったときのx^3の値を近似的に求めなさい。但し、答えにはεの一乗だけしか含んではいけません。この答えを「x^3の$x=1$のまわりでの一次のテイラー展開」と言います。

2-2 $\sin ax$の$x=\frac{\pi}{4}$での傾きを求めなさい。xが$x=\frac{\pi}{4}$から少しだけずれて$x=\frac{\pi}{4}+\varepsilon$（但し、$\varepsilon<<1$とします）となったときの$\sin ax$の値を近似的に求めなさい。但し答には$\varepsilon$の一乗しか含んではいけません。

2-3 $f(x,y)=x/y$, $f(x,y)=\cos(xy)$, $f(x,y)=1/(x+y)$について各々（おのおの）$\partial f/\partial x$と$\partial f/\partial y$を求めなさい。

2-4 $U(x,y)=\sin x\sin y$のポテンシャルがあるときに、質点にはどのような力が働くか、xy 平面上で表しなさい。xyの範囲は$x,y=-4\pi\sim+4\pi$程度にします。

2-5 $U(x,y)=\left(1+x^2+y^2\right)^{-1}$のポテンシャルがあるときに、質点にはどのような力が働くか、xy 平面上で表しなさい。xyの範囲は$x,y=-5\sim+5$程度にします。

2-6 ★$U(x,y)=\left(1+x^2+y^2\right)^{-1}$の$(1,1)$でのナブラを計算しなさい。そして、$\bar{x}$が$\bar{x}\equiv(x,y)=(1,1)$から少しだ

けずれて $\vec{x}=(1,1)+\delta\vec{x}$ となったときの $U(x,y)$ の値を近似的に求めなさい。但し答えには $\delta\vec{x}$ の一乗だけしか含んではいけません。

2-7 力の方向と大きさが $\vec{f}(x,y)=(y,x)$ となるようなポテンシャルを求めなさい。
ヒント— x で偏微分したら y になって、y で偏微分したら x になるような関数って？

2-8 $\vec{f}(x,y)=(y,x)$ を経路 $(0,0)\to(1,2)$ の線分の範囲で線積分しなさい
ヒント— 与えられた経路上の点をパラメタ表示してみなさい

2-9 ★ $\vec{f}(x,y)=(y,x)$ を経路「点 $(1,1)$ のまわりの半径 1 の円周上」で線積分しなさい
ヒント— 与えられた経路の点は $(1+\cos\theta, 1+\sin\theta)$ と書けますよね（但し $\theta=0\sim 2\pi$ ）

3 第三回

3-1 二つの質点の座標を $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ 、質量を m_1, m_2 とするとき、運動量の和 $\vec{P}$ を式で書きなさい。
これらが衝突するときに、衝突の前後で $\vec{P}$ はどうなっているか答えなさい。

3-2 ポテンシャル $U(x,y,z)=mgz$ が存在するときに、どの方向の運動量が保存されるか答えなさい。
ヒント—日常感じている重力の話です。

3-3 ポテンシャル $U(x,y)=\sin x$ がどの方向の運動量が保存されるか答えなさい。

3-4 ★ポテンシャル $U(x,y)=x^2+y^2$ が存在するときに、どの方向の運動量が保存されるか答えなさい。
ヒント—直線ではありませんので、実際に保存されるのは一瞬です。

4 第四回

4-1 左向き進行方向を正にとり、ロケットの質量を M とする。微小時間 δt の間に、燃料を δm だけ、速度 V （ロケットから見た速度）で後方に噴射したとします。噴射前（ロケット）と噴射後（ロケットと燃料）での運動量保存則を自分で導きなさい（ここまではテキストと同じ）。

4-2 ★ロケットの燃料の単位時間あたりの噴射量を、ロケットの質量に比例するとしたとき（つまり、$\delta m=\rho M\,\delta t$ ということです）に、前問の運動量保存則から、加速度がどういう方程式で表されるか導きなさい。そしてその微分方程式を解きなさい（これはテキストの結果とは違います）。

4-3 次の微分方程式を解きなさい。$\dot{x}(t)=-ax(t)$, $\dot{x}(t)=-a\sqrt{x(t)}$, $\dot{x}(t)=-ax^2(t)$, $\dot{x}(t)=-ax(t)+b$

5 第五回

5-1 極座標 $\vec{x}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について、$r=$ 定数、$\theta=\omega t$ （ω は定数）の場合に、速度と加速度の式を求めなさい。

5-2 $\vec{x}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について、$r=$ 定数、$\theta=\theta(t)$ の場合に、速度と加速度の式を求めなさい。ヒント— $\theta=\theta(t)$ と書いたのは、「θ は時間に依存して変化しますよ」という意味です。

5-3 同様に、$r=r(t)$、$\theta=$ 定数の場合に、速度と加速度の式を求めなさい。

5-4 同様に、$r=r(t)$、$\theta=\theta(t)$ の場合の速度と加速度の式を求めなさい（講義でやりました）。

5-5 ★ポテンシャルが $U=r\cos\theta$ と与えられたときの、力 $f=-\nabla U$ を求めなさい。
ヒント— U をデカルト座標で書き直してから x, y で偏微分しよう。ヒント2— $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ です。