

## 重力場

### 1 質量

$\vec{f} = m\vec{a}$  によって定義されるもの。「動きにくさ」

【余談】金属の中の電子は、周りの正イオンや他の電子との相互作用で動きにくい。

$m^*$  ~ 有効質量、電子の質量の数千倍になったり、負になったり、行列になったりする

押した方向に動かずに、別の方向(あるいは逆方向!)に進んだりする

【余談】オームの法則  $\vec{E} = \rho\vec{l}$  と同じ形をしている。実はこの「抵抗  $\rho$ 」も行列だったりする。

こういう風にスカラーだと思っていた量が実はベクトルだったり、行列だったりする

ことが、これからどんどん出て来るので大いに楽しもう。

### 2 万有引力 $F = Gm_1m_2/r^2$

$$6.67259 \times 10^{-11} (\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)$$

ニュートンの運動方程式とは全く異なる質量の定義。

一致は偶然なのか？

「動かそうとすると軽く動くけど、強烈な万有引力を生ずるような物質」

は存在しないのか？

アインシュタインは両者が一致するものと仮定して相対性理論を構築したところが、1970年代に藤井保憲らによって「第五の力」と呼ばれるものの存在が提唱された。

「数 m ~ 数 km の間で働き、物質の種類に依存する、湯川ポテンシャル型の力」

(現在まで確認はされていない)  $e^{-\lambda r}/r$

### 3 重力は弱いのか？

1mm の距離におかれた電子あるいは陽子の間に働く重力とクーロン力。

電子:  $9.1093826 \times 10^{-31} \text{kg}$ ,  $1.60217653 \times 10^{-19} \text{C}$

陽子: 電子の 1836.14 倍, 電荷は同じ

$$\text{電子同士の重力 } F_G^{e-e} \approx \frac{7 \times 10^{-11} \times (9 \times 10^{-31})^2}{(10^{-3})^2} = 567 \times 10^{-67} = 6 \times 10^{-65} \text{ N}$$

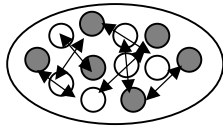
$$\text{陽子同士の重力 } F_G^{p-p} \approx \frac{7 \times 10^{-11} \times (1800 \times 9 \times 10^{-31})^2}{(10^{-3})^2} = 1600 \times 10^{-61} = 1.6 \times 10^{-58} \text{ N}$$

$$\text{電子同士のクーロン力 } F_C^{e-e} \approx \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(10^{-3})^2} = 9 \times 10^9 \times 2.6 \times 10^{-38+6} = 2 \times 10^{-22} \text{ N}$$

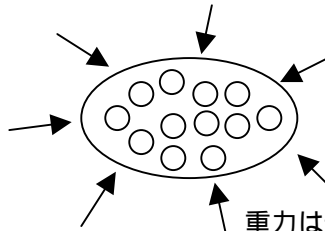
確かに重力は圧倒的に小さい(電子で  $10^{-43}$  倍、陽子で  $10^{-36}$  倍)。

無視出来るか？ 答え) No 理由) 常に引力なので遠方まで届く

クーロン力は引力と斥力があるので遠くから見るとキャンセル  
(普段、クーロン力の強さを感じないのは、みんなくっついてキャンセルしているからなのだ)



±の電荷がキャンセルして遠方へはほとんど力を及ぼさない  
注)少しは及ぼします( $r^{-3}$ )。



重力は遠方まで力を及ぼす  
宇宙の構成に寄与

#### 4 Henry Cavendish 1731-1810、英国

地球の密度を測定するために「ねじり秤」を利用。大球として  $M=195\text{kg}$  の鉛の玉を使用

$$\rho_{\text{Pb}} = 11340 \text{ kg/m}^3, \quad \frac{4\pi r^3 \rho_{\text{Pb}}}{3} = 195 \text{ より, } r = 16(\text{cm})$$

小球の半径を 1cm とすると、 $m = 47\text{g}$  となるので、

$$f = 6.67 \times 10^{-11} \times 195 \times 0.047 / 0.172 = 2 \times 10^{-8} (\text{N}) \approx 2 \times 10^{-6} (\text{gf}) = 2 (\mu\text{gf})$$

となって確かに測れそう。

当時、彼は実験専用に煉瓦<sup>れんが</sup>の家を作り、測定器を中にいれ、自分は外から望遠鏡で観察した。  
一年間で数十回の測定を行って結果を出した。現在の値と 1-2% 程度のずれしかない。

#### 5 重力ポテンシャル

$U = -\alpha/r$ , 但し  $\alpha = Gm_1m_2$  である。

以前やったように、

$$\vec{f} = -\nabla U = \alpha \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \alpha \left( -\frac{dr}{dx}, -\frac{dr}{dy}, -\frac{dr}{dz} \right) = \alpha \left( -\frac{2x}{r^2}, -\frac{2y}{r^2}, -\frac{2z}{r^2} \right)$$

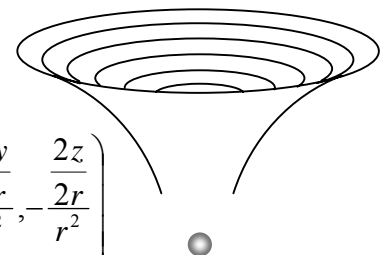
$$\text{但し } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\therefore \vec{f} = -\alpha \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) = -\frac{\alpha}{r^3} (x, y, z) = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{x}$$

単位ベクトル  $\hat{x}$  を導入すれば、 $\vec{f} = -\frac{\alpha \hat{x}}{r^2}$  を得る。方向は動径方向内向き。

( $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$  である)

c.f. 静電ポテンシャルも重力もどちらも  $\propto \frac{1}{r}$  である。理由は電磁気学で。



重力ポテンシャル  
のイメージ

### 6 球体

質点ではなく、球体ではポテンシャルはどうなるだろうか。

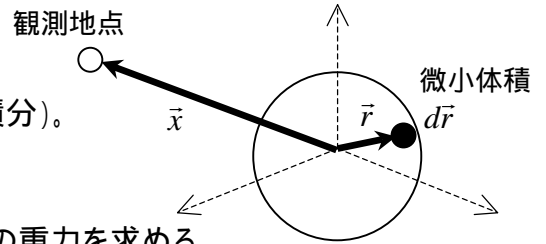
$$U(\vec{x}) = -\int \frac{\alpha d\vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|} \quad \text{但し積分範囲は半径 } R \text{ の球内(体積積分)}.$$

$\alpha = G\rho$        $\rho d\vec{r}$  が微小体積 の質量

この を足し合わせて(=積分)、半径  $R$  の大球の重力を求めろ。

$$\text{大球の質量を } M \text{ とすると、} M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \text{ なので、} \alpha = G \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$[\text{参考}] \text{ デカルト座標で書くと、} U(\vec{x}) = -\iiint \frac{\alpha dx dy dz}{|\vec{x} - \vec{r}|} \quad \text{但し } x^2 + y^2 + z^2 < R^2$$



### 7 極座標による積分

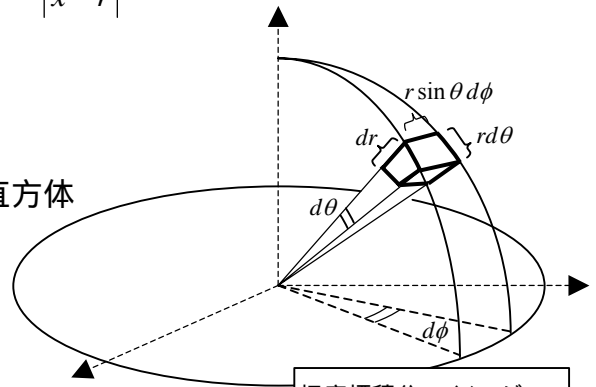
変数変換:  $x, y, z \rightarrow r, \theta, \phi$

積分の微小体積  $d\vec{r}$  (スカラー量) は右図の太線の直方体

$$d\vec{r} \approx dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\phi$$

$$= r^2 dr d\theta \sin \theta d\phi$$

$$U(\vec{x}) = -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr \frac{\alpha}{|\vec{x} - \vec{r}|}$$



極座標積分のイメージ:  
ホールのドームケーキの  
カットをイメージしよう!

座標軸は勝手に決めて良いので、 $\vec{x}$  (観測地点) を  $z$  軸にする。

こうして良いことは非常に重要

すると、 $\vec{r}$  の極座標の  $\theta$  が、そのまま、 $\vec{x}$  と  $\vec{r}$  のなす角になるので、

$$U(z) = -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr \frac{\alpha}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}}$$

観測地点が別の場所に行ったら、座標軸の方向を動かせば良い。

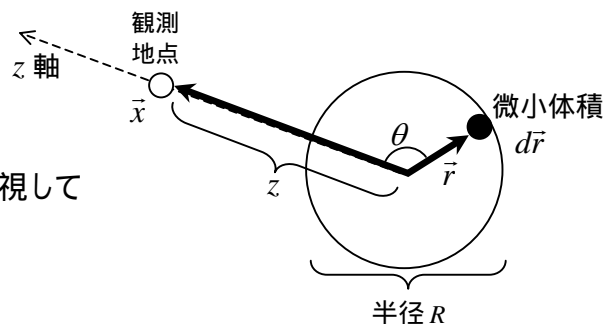
今は他に何も制限が無いので自由に動かせる。

こういう風に、積分の中で、関数を後ろにまとめて書くこともあるのだ。大人の記法に慣れよう。

以下、三重積分を順番に実行して行く。

$$7-1 \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \text{ である。}$$

$\phi$  は他にどこでも使われていないので、 $\theta$  と  $r$  を無視して勝手に積分してしまてよい。



$$7-2 \quad \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}} = \int_{+1}^{-1} \frac{\sin \theta \frac{d\theta}{dY} dY}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zrY}} \text{ である。但し } Y = \cos \theta \text{ と変数変換。}$$

積分範囲にお互いの  $r$  や  $\theta$  が入っていないので、 $r$  は定数だと思って  $\theta$  積分を実行して良い。分子の  $\sin \theta$  と  $d\theta/dY$  がキャンセルして消えるので、簡単に積分出来そうで、

$$= \int_{+1}^{-1} \frac{-dY}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zrY}}$$

ここで、 $a$  を一般の定数として、 $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = -2\sqrt{a-x}$  であるから、

$$= \frac{-2}{-2zr} \sqrt{z^2 + r^2 - 2zrY} \Big|_{+1}^{-1} = \frac{\sqrt{z^2 + r^2 + 2zr} - \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr}}{zr}$$

平方して、

$$= \frac{\sqrt{(z+r)^2} - \sqrt{(z-r)^2}}{zr}$$

となるが、そのまま開いてはダメで、絶対値が付くことを思い出して、

$$= \frac{|z+r| - |z-r|}{zr}$$

観測地点  $\bar{x}$  が球体の外側であるとする、 $r = 0 \sim R$  のいずれでも  $z > r$  なので、

$$= \frac{(z+r) - (z-r)}{zr} = \frac{2r}{zr} = \frac{2}{z}$$

7-3 最後の  $r$  積分はもはや簡単で、

$$\int_0^R r^2 dr = \frac{R^3}{3} \text{ となる。} \quad \theta \text{ や } \phi \text{ の積分結果に } r \text{ が残っていなかったのも簡単なのだ。}$$

7-4 最終結果は、1~3 を乗じて

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta}} = \frac{2}{z}, \quad \int_0^R r^2 dr = \frac{R^3}{3}$$

$$\text{より、} U(z) = -\alpha \times 2\pi \times \frac{R^3}{3} \times \frac{2}{z} = \alpha \frac{4\pi R^3}{3z}$$

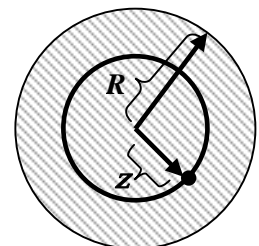
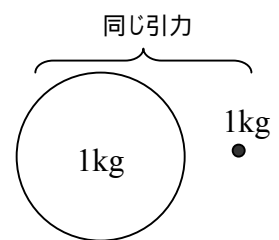
$$\text{ここで、} \alpha = G\rho = G \frac{3M}{4\pi R^3} \text{ であるから、} U(z) = -G \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{4\pi R^3}{3z} = -\frac{GM}{z}$$

変数名を  $z \rightarrow r$  と書き換えて、

$$U(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} \quad \text{これは質点と同じだ(ここで驚こう!)。}$$

8 観測地点 が、大きな球の内部にもぐり込んだときの重力ポテンシャル  
内側 ( $0 < r < z$ ) と外側 ( $z < r < R$ ) を分けて考える

【復習】  
の定義は正の値  
よって、  
 $\sqrt{x^2} = \begin{cases} +x & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$



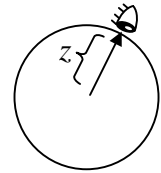
観測地点(原点からの距離  $z$ ) が球の内側の場合

8-1 内側 ( $r < z$ ) の部分の寄与

観測地点  $z$  より内側の寄与は質点と同じで OK なので、

$$\therefore U(z) = -\frac{GM_z}{z} \quad \text{但し } M_z \text{ は内側球(半径 } z \text{) の質量}$$

( $M_z$  は  $r$  に依存することに注意)



8-2 外側 ( $z < r$ ) の寄与

球の内側の内径を  $R_1$  とする (当然、 $R_1 < R$  だ)。

観測地点と原点の間の距離 =  $z$  とする。

観測地点は、内壁面でなくとも、球の内側のどこでも良いことにしよう。

(つまり、 $z < R_1$ )

$r$  の積分範囲 =  $R_1 \sim R$  に対して、いつでも  $z < r$  である。

絶対値の符号に気を付けて  $\theta$  積分を実行すると、

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}} = \frac{|z+r| - |z-r|}{zr} = \frac{z+r - (r-z)}{zr} = \frac{2z}{zr} = \frac{2}{r}$$

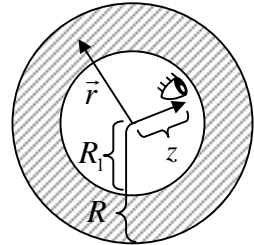
となる。  $z$  が消えた!

観測地点の場所に寄らずポテンシャルが平ら = 力は働かない

(一応、ポテンシャルの値を求めておくと、

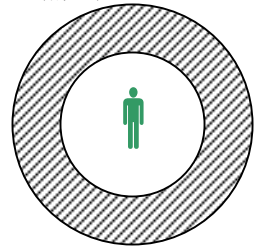
$$r \text{ 積分を実行すると、 } \int_{R_1}^R r^2 dr \times \frac{2}{r} = \int_{R_1}^R 2r dr = r^2 \Big|_{R_1}^R = R^2 - R_1^2 \text{ となって、}$$

$$U = -G\rho 2\pi (R^2 - R_1^2) \text{ となる。確かに } z \text{ に依存していない)}$$



👁 の位置は内側であればどこでも良い (講義ではこれを忘れていて、混乱しました。すみませんでした)

地下帝国では  
無重力 なのだ



8-3 結論

外側の部分は全く効かない。中空の球の中は無重力 (さっきよりもずっと大きさに驚け!)

c.f. <sup>charged shell</sup> 電荷の球殻の内側も電場はゼロになる。電磁気学で。

8-4 密度が  $r$  に依存する場合

球対称ではあるが、密度  $\rho$  が一定でなく、深さによって変わる場合を考えよう。

内側の寄与:

$$\int_0^R r^2 dr \times \frac{2}{z} \text{ が、 } \int_0^R \rho(r) r^2 dr \times \frac{2}{z} \text{ になる。}$$

球の質量は  $M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$  なので、これを代入すると、

$$U = -2\pi G \frac{M}{4\pi} \frac{2}{z} = -\frac{GM}{z}$$

と  $\rho(r)$  の関数形には依存しない。

外側の寄与:

薄い皮の球の重ね合わせと考えれば、寄与はゼロ。

(極めて薄い皮の内部では密度一定と見なせるので)

結論: 一様な球と同じ

### 9 【大事な余談】多重積分の順序

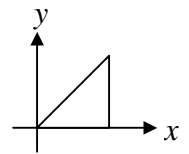
途中で発散したり、微分できないような怪しい関数でなく、かつ、積分変数が定数であれば、

積分の順序は好きに選んでよい。 $\int_0^R dr$ ,  $\int_0^\pi d\theta$ ,  $\int_0^{2\pi} d\phi$  のどれを先に積分しても OK なのだ。

注) 積分順序を変えられない場合: 「積分範囲に積分変数が含まれている場合」

$\int_0^1 dx \int_0^x dy$  は、 $y$  の積分範囲の値に  $x$  が入っているので勝手な順序変更は禁止だ。

もし、無理矢理変えるならば、 $\int_0^1 dy \int_y^1 dx$  と、積分範囲も変わってくる(右図参照)。



### 10 トンネル

中心からの距離  $D$  のところに真っ直ぐなトンネルを掘り、列車を走らせる。

すると、現時刻の列車位置より、内側の球(半径  $r$ ) の作る

ポテンシャルは  $U = -\frac{GM_r}{r}$  注)  $M_r$  は内側球(半径  $r$ ) の質量

なので、列車に働く力  $f$  は、

$$f = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM_r}{r^2} \text{ で、方向は球の中心向き。}$$

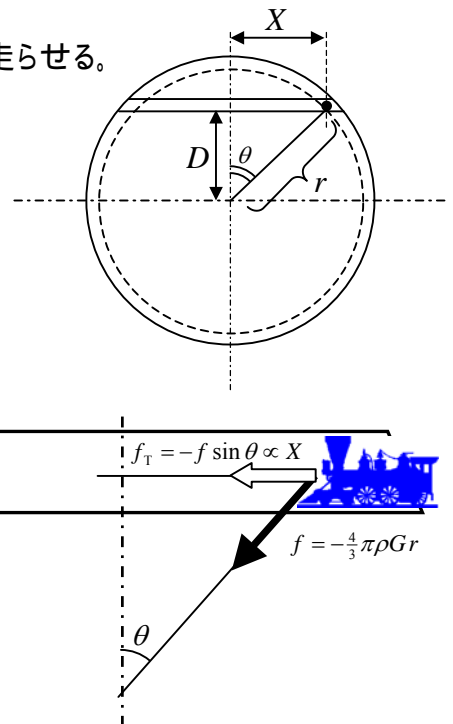
$$M_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \text{ より、 } f = -\frac{4}{3} \pi \rho G r$$

トンネルと平行な力の成分  $f_T$  は、

$$f_T = -\frac{4\pi\rho G}{3} r \sin\theta \text{ で、方向は水平に戻る方向。}$$

トンネル内水平方向の座標を  $X$  とすると、 $X = r \sin\theta$  なので、

$$f_T = -\frac{4}{3} \pi \rho G X$$



### 11 周期と最高速度

前問の結果は、 $k = \frac{4\pi\rho G m}{3}$  の調和振動子であることを意味している。但し、 $m$  = 質点の質量

周期は  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}$  です。ここで、 $G = 6.67259 \times 10^{-11} (\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)$ 、及び、

地球の平均密度は wikipedia によれば、 $\rho = 5515 \text{kg/m}^3$  であるので、

$$\omega \approx \sqrt{\frac{4 \times 3 \times 5500 \times 6.6 \times 10^{-11}}{3}} = \sqrt{2.2 \times 6.6 \times 10^{-7}} = \sqrt{1.4 \times 10^{-6}} = 1.2 \times 0.001$$

$$\text{往復時間 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6}{1.2 \times 10^{-3}} = 5000 \text{ s}$$

最高速度は、単振動の問題で「全エネルギーが運動エネルギーになったとき」

を調べればよくて、 $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$  を使うと、 $\frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}m\nu_0^2$  より、

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}R = \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}R = \sqrt{4 \times 5500 \times 6.6 \times 10^{-11}} \times 6.4 \times 10^6 = \sqrt{140 \times 10^{-8}} \times 6.4 \times 10^6 \\ &= 12 \times 10^{-4} \times 6.4 \times 10^6 = 1.2 \times 6.4 \times 10^3 \approx 7500 \text{ (m/s)} \sim \text{マッハ } 6 \text{ 程度。} \end{aligned}$$

【発展問題】地球内部の途中の密度変化を考慮したらどうなるか考えてみましょう。

12 子供のトンネル(浅く掘った場合ということ)でも往復列車は実現可能？

もちろん、No です。 $f_T = -\frac{4\pi\rho G}{3}r \sin\theta$  の  $\theta$  が小さくなって、列車は実質的に動かないでしょう。