機能創造理工学Ⅱ　期末試験　　日時：2011/7/13 (水) 09:15-10:45 試験場 9-255, 256
※途中の計算を必ず書こう。答えのみでは採点できません。

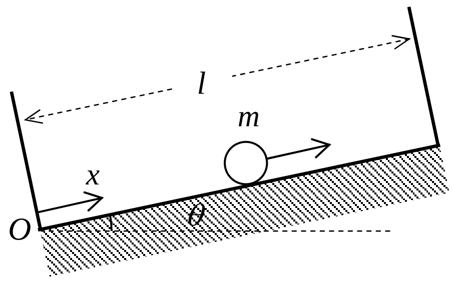
問1．二次元平面内で等速直線運動している質点について、作用積分を時刻 $t=0\sim1$ で計算してみよう。但し、ラグランジアンは $L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$ であり、初期条件は $x(0)=0,\ y(0)=0$, $\upsilon_x(0)=\upsilon_0,\ \upsilon_x(0)=0$ とする。

問2．　前問で、質点の運動を $x(t)=\alpha t^n,\ y(t)=0$ と仮定して $t=0\sim1$ での作用積分を計算し、最小となる n を求めよう。但し $n\geq1$ とする。

問3．二次元面内を運動する質点のハミルトニアン $H=\frac{1}{2m}\left(\dot{p}_x^2+\dot{p}_y^2\right)+mg\left(x\cos\theta+y\sin\theta\right)$ について、正準方程式を書き、解いてみよう。ここで θ は定数とする。

問4．　前問3で、$H=\left(\sum p_i\dot{x}_i\right)-L$ の変換の定義から、ラグランジアンを求めよう。注）一般化運動量を速度に直すのを忘れないように。

問5．右図のような両側に壁がある、角度 θ の勾配を持ち、長さが l の斜面を考える。質量 m の質点のラグランジアンを書こう。但し、粒子の座標 x は斜面に沿ってとるものとし、位置エネルギーの原点は O とする。



問6．前問5のラグランジアンから、一般化運動量 p を求め、さらに、ラグランジアンをハミルトニアンに変換してみよう。

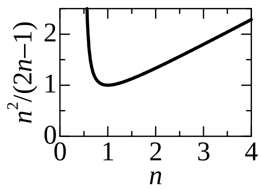
問7．前問6で、質点が壁と弾性衝突する場合、粒子の持つ全エネルギーを定数 E として、位相空間 (p,x) に軌跡を描こう。但し、E が $mgl\sin\theta$ に比べて、大きい場合、同じ場合、小さい場合、の三通りについて場合分けをして描くこと。

問8．前問6で、質点が壁と跳ね返り係数0.5で非弾性衝突する場合の軌跡を、エネルギーの初期値が $E=2mgl\sin\theta$ の場合について描こう。最終的に質点は位相空間のどの点に来るかも示す。
ヒント、壁に衝突する度に、運動量は $p\to-0.5p$ と変わるので E は減少して行くことに注意。

解1.〔配点15〕$x=\upsilon_0 t,\ y=0$ であるので $\upsilon_x=\upsilon_0,\upsilon_y=0$、よって $S=\int_0^1 \frac{\upsilon_0^2+0}{2m}dt=\frac{\upsilon_0^2}{2m}$

解2.〔配点15〕$\upsilon_x=n\alpha t^{n-1},\ \upsilon_y=0$ であるので

$$S=\int_0^1\frac{n^2\alpha^2 t^{(2n-2)}+0}{2m}dt=\left.\frac{n^2\alpha^2 t^{(2n-1)}}{2m(2n-1)}\right|_0^1\propto\frac{n^2}{2n-1}$$



これは右図に示すとおり、確かに $n=1$ で極小となる。

解3.〔配点10〕$H=\frac{1}{2m}\left(\dot{p}_x^2+\dot{p}_y^2\right)+mg(x\cos\theta+y\sin\theta)$ より、

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-mg\cos\theta,\quad \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=-mg\sin\theta,\quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m},\ \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}$$

解4.〔配点10〕$H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-L$ より、$L=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-H$

$$L=m\dot{x}^2+m\dot{y}^2-\frac{1}{2m}\left((m\dot{x})^2+(m\dot{y})^2\right)-mg(x\cos\theta+y\sin\theta)=\frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2+m\dot{y}^2\right)-mg(x\cos\theta+y\sin\theta)$$

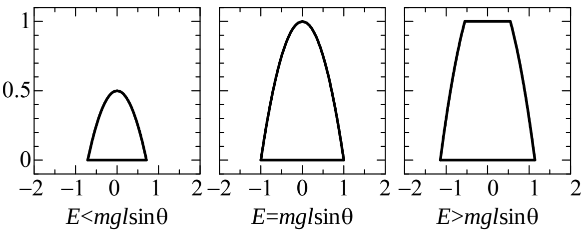
実は、$\begin{cases}X=x\cos\theta+y\sin\theta\\ Y=x\sin\theta-y\cos\theta\end{cases}$ と変数変換すると、$L=\frac{1}{2}\left(m\dot{X}^2+m\dot{Y}^2\right)-mgX$ と簡単になる。

解5.〔配点10〕斜面上を x だけ進むと高さは $x\sin\theta$ だけ増えるので、$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx\sin\theta$

解6.〔配点10〕$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}$ より、$H=p\dot{x}-L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+mgx\sin\theta=\frac{p^2}{2m}+mgx\sin\theta$

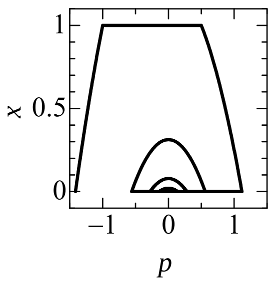
解7.〔配点15〕斜面上は加速度 $\pm mg\sin\theta$ で進み、壁に当たるたびに符号が反転する。

$E=\frac{p^2}{2m}+mgx\sin\theta$ より、$E\overset{<}{\underset{>}{=}}mgl\sin\theta$ の各場合について、位相空間 (p,x) での軌跡は右図のようになる（横軸が p）。底辺の幅は、下端で壁にぶつかる際の運動量の変化であり、$\pm\sqrt{2mE}$ である。
上辺の幅は、上端で壁にぶつかる際の運動量の変化であり、$\pm\sqrt{2m(E-mgl\sin\theta)}$ である。



解8.〔配点15〕最終的に速度ゼロで下端で止まることは明らかなので、原点に向かう渦巻き状のグラフになる。跳ね返り係数が 0.5 の場合を図に示す。各衝突での変化は以下の通り。但し、簡単のため、$mgl\sin\theta=1$ 及び、$2m=1$ とすると、下端から出発した場合、初期値が $E=2mgl\sin\theta=2$ なので、

E	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{64}$
$p_{下端}$	$\sqrt{2}\downarrow$	$\frac{\sqrt{5}}{2}\rightarrow$	$\frac{\sqrt{5}}{4}\downarrow$	$\frac{\sqrt{5}}{4}\rightarrow$	$\frac{\sqrt{5}}{8}\downarrow$
$p_{上端}$	$1\rightarrow$	$\frac{1}{2}\uparrow$	$0\rightarrow$	$0\uparrow$	$0\rightarrow$



となる。最終的には当然、$(p,x)=(0,0)$ に落ち着く。

【講評】

等加速度運動だけと言う、かつてない簡単な問題にしてしまいました。ラグランジアン、最小作用の原理、ハミルトニアン、位相空間と言った「概念」の理解が主な目的だからです。