第 3 回 ラグランジアンの御利益と応用例

0先週の復習

0-1 最小作用の原理と Euler-Lagrange 方程式

この宇宙 ― U の大きなところをゆっくり、U の小さなところを速く進む運動が安

変分を適用すると、$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0}_{\text{Euler-Lagrange eq.}}$ 但し、q は一般化座標

（$\overbrace{x, y, z,}^{\text{デカルト}}$ $\overbrace{r, \theta, \phi,}^{\text{三次元極座標}}$ $\cdots$ をまとめて一般化座標と言う

多変数ならば $q_1, q_2, \cdots$ について各々 $\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0$ が成り立ち、連立方程式。

0-2 最小作用の原理 ⇆ Newton の運動方程式 ⇆ Euler-Lagrange 方程式

ニュートンの運動方程式の代わりに L から出発しても同じ

⇒ 統計力学（10^{23} 個程度の多数の粒子）や、

量子力学（波としてみなければいけない小さな粒子）へ容易に対応。

1 ラグランジアンのご利益

1-1 時間微分になっている関数を自由に足したり引いたりして良い

$L = L_0 + \dot{f}(t)$ とテキトーな t の関数を足してみますと、

$f(t)$ は x や $\dot{x}$ を含んでいては
いけないということです。

最小作用の原理は、

$$S=\int_0^t L dt=\int_0^t L_0+\dot{f}\, dt=S_0+f(t)-f(0)$$

となって、最後の $f(t)-f(0)$ は、途中でどういう運動をしたかに寄らない定数です。

ちょっと信じられないかも知れませんが次の例を見て見ましょう。

1-2 デカルト座標でなくとも良い

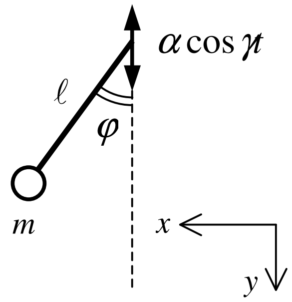
∵変分の議論は「変数をずらすだけ」。

⇒ 座標を表すパラメタであれば何でも良い。(角度、*etc.*)

⇔ ニュートンの運動方程式では、

「座標≡長さの次元を持つもの」

1-3 速さとポテンシャルがわかれば、直ちに運動方程式が求まる



例）支点が$\alpha\cos\gamma t$で上下に振動している振り子(振れ角φ)

$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+mgy$で、$x=l\sin\varphi$, $y=\alpha\cos\gamma t+l\cos\varphi$より、

$\dot{x}=l\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\dot{y}=-\alpha\gamma\sin\gamma t-l\dot{\varphi}\sin\varphi$を代入して、

$$L=\frac{m}{2}(l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi+l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi+\alpha^2\gamma^2\sin^2\gamma t+2\alpha\gamma\sin\gamma t\cdot l\dot{\varphi}\sin\varphi)+mg(\alpha\cos\gamma t+l\cos\varphi)$$

となり、1+2 項を s^2+c^2 でまとめると、

$$=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2+\underbrace{\frac{m\alpha^2\gamma^2}{2}\sin^2\gamma t}_{\varphi なし}+ml\gamma\alpha\sin\gamma t\cdot\dot{\varphi}\sin\varphi+mgl\cos\varphi+\underbrace{mg\alpha\cos\gamma t}_{\varphi なし}$$

で、φを含まない項を後ろに持ってきて、積分できるように変換しておくと、

$$=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2+ml\gamma\alpha\dot{\varphi}\sin\gamma t\sin\varphi+mgl\cos\varphi+\frac{m\alpha^2\gamma^2}{2}\left(\frac{1-\cos2\gamma t}{2}\right)+mg\alpha\cos\gamma t$$

最後の 2 項は、いわば外力の項でφや$\dot{\varphi}$を含んでおらず、純粋に時間の関数$f(t)$とみなせます。よって時間で一旦積分してしまい、

$$=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2+ml\gamma\alpha\dot{\varphi}\sin\gamma t\sin\varphi+mgl\cos\varphi+\frac{d}{dt}\left(\frac{m\alpha^2\gamma^2}{2}\frac{t-\sin2\gamma t/2\gamma}{2}+\frac{mg\alpha}{\gamma}\sin\gamma t\right)$$

と書けますから、取り除いてしまえます。

∵さっき述べたように、ラグランジアンに任意のdf/dtを加えても OK なので。

（積分すると始点と終点の「値」になってしまい、途中の形に依存しなくなるから）

結局、

$$=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2+ml\gamma\alpha\dot{\varphi}\sin\gamma t\,\sin\varphi+mgl\cos\varphi$$

となります。オイラー・ラグランジュ方程式に代入すれば、

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\underbrace{ml\gamma\alpha\dot{\varphi}\sin\gamma t\cos\varphi}_{\text{二項目}}\underbrace{-mgl\sin\varphi}_{\text{三項目}}\underbrace{-\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}\right)}_{\text{一項目}}\underbrace{-\frac{d}{dt}\left(ml\gamma\alpha\sin\gamma t\sin\varphi\right)}_{\text{二項目}}=0$$

と、あっと言う間に運動方程式が得られました。このように機械的な計算だけで、運動方程式が得られるというのがラグランジアンのご利益です。式を整理すると、

$$l\ddot{\varphi}=\underbrace{\gamma\alpha\dot{\varphi}\sin\gamma t\cos\varphi}_{\text{キャンセル}}-g\sin\varphi-\gamma^2\alpha\cos\gamma t\sin\varphi\underbrace{-\gamma\alpha\dot{\varphi}\sin\gamma t\cos\varphi}_{\text{キャンセル}}$$

$$\therefore\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi-\frac{\gamma^2\alpha}{l}\cos\gamma t\sin\varphi$$

です。$\alpha=0$とすれば、確かに単純な振り子の式になります。但し、これが解けるかどうかは別問題でして、ラグランジアンのご利益はあくまで、運動方程式を導くところまでです。

【注意】運動方程式が導かれればあとはパソコンで数値的に解けます

1-4 極座標で$\vec{F}=m\vec{a}$を書く

一年生の力学の復習です。$x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$より、

(I) $\dot{x}$と$\dot{y}$と$\dot{z}$の時間微分は、$\dot{x}=\dot{r}\sin\theta\cos\phi+r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi-r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi$, *etc.*

(II)二回微分は、
$$\begin{aligned}\ddot{x}&=\ddot{r}\sin\theta\cos\phi+\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi-\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\\&+\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi+r\ddot{\theta}\cos\theta\cos\phi-r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\phi-r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi\\&-\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi-r\ddot{\phi}\sin\theta\sin\phi-r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\phi\end{aligned}$$

(III) r,θ,ϕについて逆に解く

(IV) Uの微分を$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$から極座標の微分へと変数変換

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial\phi}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

このうち、第二項の係数$\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$は$x\sin\phi = y\cos\phi$を$x$で微分して、

$$\sin\phi + x\cos\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} = -y\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\therefore \sin\phi + \left(r\sin\theta\cos^2\phi + r\sin\theta\sin^2\phi\right)\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$$

よって、$\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = -\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta}$

次に$x^2 + y^2 = z^2\tan^2\theta$を$x$で微分して、

$$2x = 2z^2\tan\theta\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$\therefore \dfrac{x}{z^2}\Big/\dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta} = \dfrac{\partial\theta}{\partial x}$　　ここで、$\dfrac{x}{z^2} = \dfrac{\sin\theta\cos\phi}{r\cos^2\theta}$であるから、

よって、$\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta\cos\phi}{r}$

最後に$x = r\sin\theta\cos\phi$をxで微分して、

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$= \dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\cos\phi + \sin^2\phi$　（前々の結果代入）

（前の結果を代入）

よって、$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\cos^2\phi\left(1-\cos^2\theta\right)}{\sin\theta\cos\phi} = \cos\phi\sin\theta$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}$$

xの偏微分だけで死にそうになります。

という膨大な計算が必要です。

一方、ラグランジアンを使えば、$L=mv^2/2-U$に一回微分の式(I)を代入するだけで、

$$L=\frac{m}{2}\begin{bmatrix}(\dot{r}\sin\theta\cos\phi+r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi-r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)^2\\+(\dot{r}\sin\theta\sin\phi+r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi+r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)^2\\+(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta)^2\end{bmatrix}-U(\vec{r})$$

$$=\frac{m}{2}\begin{bmatrix}\dot{r}^2\sin^2\theta+r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+\\\dot{r}^2\cos^2\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta+r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\end{bmatrix}-U(\vec{r})$$

・上段は一行目と二行目の各項の自乗和と、一項目と二項目のクロスターム

（※一項目と三項目、二項目と三項目のクロスタームはキャンセル）

・下段は三行目をそのまま展開

$$=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)-U(\vec{r})$$

すると三変数の E.-L.方程式から、運動方程式は直ちに $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial r}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=0\\\dfrac{\partial L}{\partial \theta}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=0\\\dfrac{\partial L}{\partial \phi}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=0\end{cases}$ となります。

実際の計算も、

$$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=mr\dot{\theta}^2+mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta-m\ddot{r}-\frac{\partial U}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta-\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)-\frac{\partial U}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=-\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)-\frac{\partial U}{\partial \phi}=0$$

と、驚くべき簡単さで得られます。特に、ポテンシャルの微分を変数変換する必要が全くないことに注意して下さい。

1-5 保存則

U が中心力 $U=U(r)$ ならば、三番目の式から、

$mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta=const.$ という保存則が得られます。これは角運動量です。

ラグランジアンに含まれない変数に着目すると、このように簡単に保存則が見つかります

※一般的には座標ϕがLに含まれないと$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \phi}}_{=0} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$となるので$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = const.$

2 保存量 — エネルギーや運動量など

2-1 保存則＝系の「対称性」と関係

◆ 時間の一様性

ある時間に始まった運動も、別の時間に始まった運動も同じである

◆ 空間の一様性

座標$\vec{x}$で起こった運動も$\vec{x}+\vec{a}$で起こった運動も同じ

◆ 空間の等方性

方向に依存しない

2-2 時間の一様性

ラグランジアンが決まれば運動が決まりますから、時間が一様で、いつ始まった運動も「同じ」になるためには、ラグランジアンが時間を含んでいてはならないことになります。

例）$U(x,t)=-mgxt$のように重力が増える系では、時間は一様でありません。

ラグランジアンが時間を含まなければ、時間の全微分は、$\frac{dL}{dt}(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$

ラグランジュ方程式より、第一項は、$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ となるので、$\dot{A}B + A\dot{B}$の形に注意すれば

$$\frac{dL}{dt}(q,\dot{q}) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \overbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\frac{d}{dt}\dot{q}\right)}^{\text{これが}\dot{A}B+A\dot{B}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)$$

となり、両辺を引いてやると、

$$\therefore 0 = \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right) = \frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)$$

を得ます。これを積分すれば、$const. = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$ となります。これはエネルギーです。

実際、デカルト座標では、$L = \sum_i \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - U(x_1, x_2, ...)$ ですから、　注）$\sum_i$ は質点の和。

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = \sum_i m\dot{x}_i \cdot \dot{x}_i - \sum_i \frac{m\dot{x}_i^2}{2} + U = \sum_i \frac{m\dot{x}_i^2}{2} + U$$ 　となって確かにエネルギーです。

2-3 空間の一様性

空間が一様であれば、別の地点で始まった運動も同じになるはずですから、座標を平行移動してもラグランジアンが不変になることが期待されます。

実際、すべての質点の座標を $\vec{x}_a \to \vec{x}_a + \delta\vec{x}$ と変換したときのラグランジアンの変化は

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_a}\delta\vec{x} = \left(\sum_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_a}\right)\delta\vec{x}$$ 　注）$\sum_a$ は質点の和。

ですから、これがゼロになるためには、$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_a} = const.$ です。これは運動量です。

実際、デカルト座標で書けば、$\sum_a m\dot{\vec{x}}_a = const.$ となり、全運動量の保存則を与えます。

この空間の一様性のことを「並進対称性」と呼ぶこともあります。

(注意) 先週の話を覚えている人は、ラグランジアンの変化が必ずしもゼロでなくても良いのではないかと思うでしょうが、今の話は、$\delta L = 0$ になるかどうかが問題なのではなく、$\delta L = 0$ になったときに、何か保存量が存在する、ということです。

2-4 一般化運動量

デカルト座標以外の座標(角度など)のことを「一般化座標」と呼びました。

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ のことを「一般化運動量」と呼びます。

2-5 並進対称性が無い系とは

重力場の存在する系は、もちろん、一様ではありません。ですから、ほっておくと、運動量はどんどん変化して行きます(いわゆる、「落ちる」という現象です)。

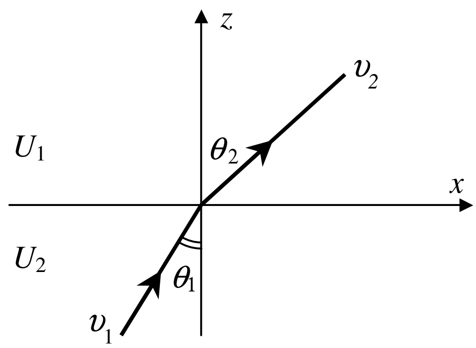
【重要】一様な重力場 $U=-mgz$ でも、x, y 方向に関しては一様です。

もし、ある方向 δy にずらして L が不変なら、その方向の運動量 $\sum_a \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_a} = \sum_a m\dot{y}_a$ は保存します。

2-6 例題

ポテンシャルが $z>0$ で U_1 , $z<0$ で U_2 である系で、粒子が速度 v_1 で境界面 $z=0$ に角度 θ で入射した際の運動を考えましょう。

境界面に平行な方向は「一様」です。よって、運動量の x 成分は保存します。



$$m v_1 \sin\theta_1 = m v_2 \sin\theta_2$$

一方、エネルギーの保存則から、

$$\frac{m v_1^2}{2} + U_1 = \frac{m v_2^2}{2} + U_2$$

なので両者をまとめて v_2 を消去して、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\left(\left(m v_1^2/2 + U_1 - U_2\right)\frac{2}{m}\right)^{1/2}}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2}{m v_1^2}\left(U_1 - U_2\right)}$$

となり、古典粒子(〜波でない)の屈折の法則を与えます。

c.f. 光の屈折(Snell 則)は $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{n_2}{n_1}$。

入射粒子の運動エネルギーを E、段差を $\Delta U=U_2-U_1$ とすると、$\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\sqrt{\dfrac{E-\Delta U}{E}}$

臨界角は $\left|\sin\theta_2\right|\le 1$ より、$\sin\theta_2=\dfrac{\sin\theta_1}{\sqrt{\dfrac{E-\Delta U}{E}}}\le 1$ となり、$\sin^2\theta_1\le\dfrac{E-\Delta U}{E}=1-\dfrac{\Delta U}{E}$

$\therefore\sqrt{\dfrac{\Delta U}{E}}\le\cos\theta_1$ (θ_1 が小さくないと跳ね返される)