近似を進めて二次の微少量e^2まで取る場合

一次の近似(e^1まで残す近似)で$w^{(1)}=0$がわかったので、今度は微小量の 2 次までとって、$x=A\cos wt+\frac{eaA^2}{2w_0^2}\left(\frac{\cos 2wt}{3}-1\right)+e^2x^{(2)}$ とします。なお、「近似を進める」とは物理用語で、近似の精度を上げることを意味します。

先ほどの $x^{(1)}$ までの結果では振動数はw_0でしたが、近似を進めたので、再び w となります。すなわち、$w=w_0+e^2w^{(2)}$ とe^2 の項を復活させたわけです。

運動方程式は、$\ddot{x}+w_0^2x=-aex^2-be^2x^3$　ですから、

左辺=

$$-Aw^2\cos wt-\frac{eaA^2}{2w_0^2}\frac{4w^2\cos 2wt}{3}+e^2\ddot{x}^{(2)}+w_0^2\left(A\cos wt+\frac{eaA^2}{2w_0^2}\left(\frac{\cos 2wt}{3}-1\right)+e^2x^{(2)}\right)$$

ここで、$w^2\approx w_0^2+2e^2w_0w^{(2)}+O\left(e^4\right)$ですから、

第 1 項＋第 4 項= $A\left(-w^2+w_0^2\right)\cos wt\approx -2e^2Aw_0w^{(2)}\cos wt$　となり、

さらに、$ew^2\approx ew_0^2+O\left(e^3\right)$に注意すると、

第 2 項+第 5 項$\approx -\frac{3eaA^2}{6}\cos 2wt-\frac{eaA^2}{2}$

となります。一方、

右辺$=-aex^2-be^2x^3$　に、$x=A\cos wt+\frac{eaA^2}{2w_0^2}\left(\frac{\cos 2wt}{3}-1\right)+e^2x^{(2)}$ を代入して整理すれば、

$$\approx -ae\left(A^2\cos^2 wt + A\cos wt\cdot\frac{eaA^2}{w_0^2}\left(\frac{\cos 2wt}{3}-1\right)\right)-be^2A^3\cos^3 wt$$

ここで、以下の公式に注意すると、

$$\cos 3q = \cos 2q\,\cos q - \sin 2q\,\sin q = \left(2\cos^2 q - 1\right)\cos q - 2\sin^2 q\,\cos q$$

$$= 2\cos^3 q - \cos q - 2\cos q + 2\cos^3 q = 4\cos^3 q - 3\cos q$$

$$\therefore \cos^3 q = \frac{\cos 3q + 3\cos q}{4}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a\,\cos b \mp \sin a\,\sin b\ ,$$

$$\therefore \cos(2q+q)+\cos(2q-q) = 2\cos 2q\,\cos q$$

ですから、第二項は$\propto \cos wt\cos 2wt = \dfrac{\cos 3wt}{2}$となり、結局、

$$\ddot{x}^{(2)} + w_0^2 x^{(2)} = \left(2Aw_0w^{(2)} + \frac{5a^2A^3}{6w_0^2} - \frac{3bA^3}{4}\right)\cos wt - \left(\frac{a^2A^3}{6w_0^2} + \frac{bA^3}{4}\right)\cos 3wt$$

です。前の一次近似の時と同様に、左辺は振動数w_0の調和振動に対応していますか

ら、右辺で同じ振動数の外力が働くと振幅はどんどん大きくなって行ってしまいます。

よって、右辺の$\cos wt$の係数はゼロでなければなりません。

よって、振動数に

$$w^{(2)} = \frac{e^2}{2Aw_0}\left(\frac{3bA^3}{4} - \frac{5a^2A^3}{6w_0^2}\right) = \frac{A^2e^2}{2w_0}\left(\frac{3b}{4} - \frac{5a^2}{6w_0^2}\right)$$

という補正が得られることになります。確かに 2 次の微小量です。

すると、解$x^{(2)}$は、

$$\ddot{x}^{(2)}+w_0^2x^{(2)}=-\frac{A^3}{2}\left(\frac{a^2}{3w_0^2}+\frac{b}{2}\right)\cos 3wt$$

を満たすことになりますから、今度は$x^{(2)}=D+E\cos 3wt$ とおけば、

左辺=$E\left(-9w^2+w_0^2\right)\cos 3wt+Dw_0^2\approx -8Ew_0^2\cos wt+Dw_0^2$

ですから、直ちに、D=0 と$E\cong\dfrac{A^3}{16w_0^2}\left(\dfrac{a^2}{3w_0^2}+\dfrac{b}{2}\right)$が得られます。

ここで、D=0 の意味は自明ですね。4 乗のポテンシャルですから、対称性からして、振動の中心はずれない、というわけです。

以上をまとめると、

$$w=w^{(0)}+ew^{(1)}+e^2w^{(2)}+\cdots=w_0+0+\frac{e^2}{2w_0}\left(\frac{3b}{4}-\frac{5a^2}{6w_0^2}\right)$$

$$x=x^{(0)}+ex^{(1)}+e^2x^{(2)}+\cdots$$

$$=A\cos wt+\frac{eA^2}{2w_0^2}\left(\frac{\cos 2w_0t}{3}-1\right)+\frac{e^2A^3}{16w_0^2}\left(\frac{a^2}{3w_0^2}+\frac{b}{2}\right)\cos 3wt$$

得られた結果を確かめるために、振動数の補正$w^{(2)}$を以前にやった振り子の問題に適用してみましょう。振り子の運動方程式は、

$m\ell\ddot{q}=mg\sin q\cong mg\left(q-\frac{1}{6}q^3\right)$ですから、$w_0\equiv\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ とおけば、

$\ddot{q}-w_0^2q=-\dfrac{w_0^2}{6}q^3$ですから、先ほどの *notation* では$a=0$、$b=\dfrac{w_0^2}{6}$です。

よって、$w^{(2)}=\dfrac{a^2}{2w_0}\dfrac{w_0^2}{8}=\dfrac{a^2w_0}{16}$ となって以前やった結果と一致します。