2000 年度解析力学期末試験　略解

解 1. ラグランジュの未定乗数法の実例。束縛条件が「楕円体上の点」という少し複雑な式なので、z について解いて代入して消去、という方法ではかなり大変な計算になるかもしれない。未定乗数法を使えば,単に、$F = f + lg$ の極値を求めれば良いだけで計算も簡単。まず、

$$\nabla F = \begin{pmatrix} yz - 2lx/a^2 \\ xz - 2ly/b^2 \\ xy - 2lz/c^2 \end{pmatrix} = 0\text{, 及び } F_l \equiv \frac{\partial F}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial l} + \frac{\partial(lg)}{\partial l} = g = 0 \text{ より、}$$

最初の三式を辺々乗じて、$\dfrac{8xyz\,l^3}{(abc)^2} = (xyz)^2$ を得る。よって $xyz = 0,\ or\ \dfrac{8l^3}{(abc)^2}$ のいずれか。ここでゼロの方は、結局 xyz 全てがゼロになってしまうので束縛条件に反する。よって後者のみが成り立つとしてよい。

$\therefore \dfrac{8l^3}{(abc)^2} = xyz = x \cdot \dfrac{2xl}{a^2} = \dfrac{2x^2 l}{a^2}$ などより、$x = \pm\dfrac{2l}{bc}$, $y = \pm\dfrac{2l}{ac}$, $z = \pm\dfrac{2l}{ab}$ を得る。これらを束縛条件に代入すれば、$\left(\pm\dfrac{2l}{abc}\right)^2 \cdot 3 = 1$ であるから、未定乗数は $l = \dfrac{\pm abc}{2\sqrt{3}}$ となる。よって、

$x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \pm\dfrac{c}{\sqrt{3}}$ のとき、$f = xyz = \dfrac{\pm abc}{3\sqrt{3}}$ という極値を取る。

解 2. 調和振動子において最小作用の原理が成り立っていることを確かめる問題。調和振動しの解は、もちろん、sin 関数であるが、これは 1/4 周期に限って言えば、単調増加している。よって、この 1/4 周期について、運動を sin 関数とした場合と、等速直線運動とした場合とで、作用積分を計算して、どちらが小さいか比べようというものである。
注意点としては、半周期後の質点の位置を、両者で揃える必要がある。sin 関数の方の位置は、
$x(p/2w_0) = A\sin(w_0(p/2w_0)) = A$ であるので、等速直線運動の方もこれに合わせて、
$x(p/2w_0) = B\cdot(p/2w_0) = A$ より、$x(t) = Bt = 2Atw_0/p$　となる。これらを使って、まず、

$S = \displaystyle\int_0^{p/2w_0} dt\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right)$ であるから、sin 関数については、

$x = A\sin w_0 t$ 及び、$\dot{x} = Aw_0\cos w_0 t$ 代入して、

$$S = \int_0^{p/2w_0} dt\left(\frac{mA^2w_0^2\cos^2 w_0 t}{2} - \frac{kA^2\sin^2 w_0^2 t}{2}\right) = \frac{mA^2w_0^2}{2}\frac{1}{w_0}I_C - \frac{kA^2}{2}\frac{1}{w_0}I_S$$

但し、$I_C = \displaystyle\int_0^{p/2} dq\cos^2 q = \int_0^{p/2} dq\,\frac{\cos 2q + 1}{2} = \frac{p}{4} = I_S = \int_0^{p/2} dq\,\frac{-\cos 2q + 1}{2}$

$$\therefore S = \frac{mA^2p}{8}\left(w_0 - \frac{k}{m}\frac{1}{w_0}\right) = \frac{mA^2p}{8}\left(w_0 - w_0^2\frac{1}{w_0}\right) = 0$$

一方、後者の放物線ついては、
$x = 2Atw_0/p\ \ (t \le p/2w_0)$ 及び　$\dot{x} = Aw_0/2p$ であるから、

$$S = \int_0^{p/2w_0} dt\left(\frac{mA^2w_0^2}{8p^2} - \frac{kA^2w_0^2t^2}{8p^2}\right) = \frac{mA^2w_0^2}{8p^2}\int_0^{p/2w_0} dt\left(1 - \frac{kt^2}{m}\right)$$

$$= \frac{8mA^2}{a^2}\left(t - \frac{w_0^2}{3}t^3\right)_0^{p/2w_0} = \frac{8mA^2}{a^2}\left(\frac{p}{2w_0} - \frac{p^3}{24w_0}\right) = \frac{4mA^2p}{a^2w_0}\left(1 - \frac{p^2}{12}\right) > 0$$

注) 本当は、放物線と比較させたかったのですが、、、、。

解 3.

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{2m\dot{y}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}-\frac{k(x-y)^2}{2}-\frac{ky^2}{2}$$ より、 $$\begin{cases}-kx-k(x-y)=m\ddot{x}\\ k(x-y)-ky=2m\ddot{y}\end{cases}$$

行列表示して、 $\begin{pmatrix}m\ddot{x}\\2m\ddot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\therefore \begin{pmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\end{pmatrix}=-w_0^2\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

固有値は、 $(2-l)(1-l)-1/2=0$ より、 $2l^2-6l+3=0$ 、 $\therefore l=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

よって、基準振動数は $w_\pm=\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}}w_0 \quad (w_0=\sqrt{\frac{k}{m}})$

解 4.

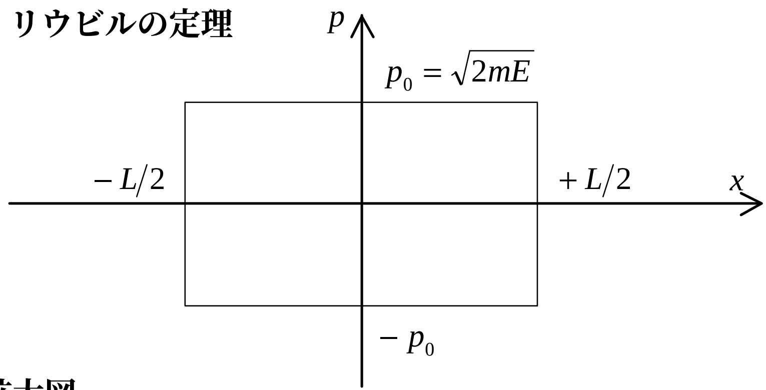
まず、正準方程式より、 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\vec{p}}=\frac{1}{m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)$

よって、 $\vec{p}=m\vec{u}+\frac{e}{c}\vec{A}$ となるので、L への変換は、

$$L=\vec{p}\cdot\vec{u}-H=\left(m\vec{u}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{u}-\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2=mu^2+\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{u}-\frac{1}{2m}\left(m\vec{u}+\frac{e}{c}\vec{A}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$$

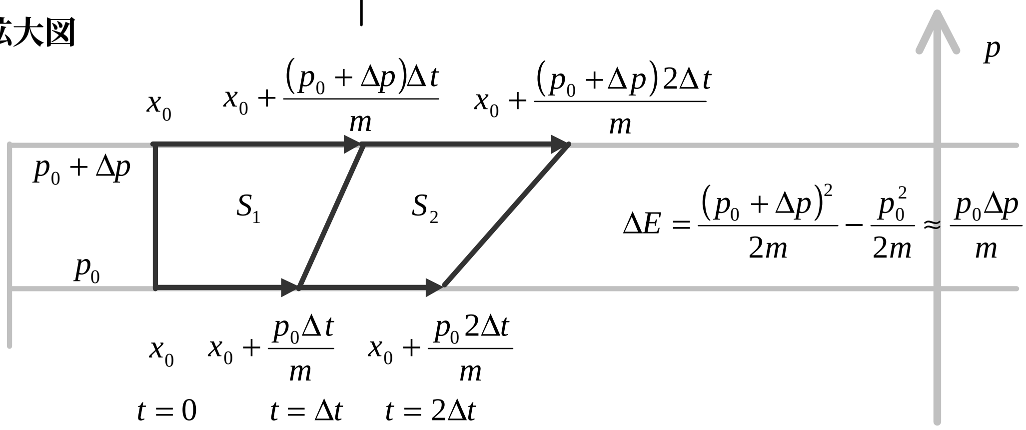
$$=\frac{mu^2}{2}+\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{u}$$ である。

解 5. リウビルの定理



跳ね返る度に、運動量は符号反転するので、軌跡は長方形となる。この軌跡の「線」を拡大して見たのが、下の図である。

拡大図



$\therefore S_1=S_2=\frac{1}{2}\cdot\Delta p\cdot\frac{(2p_0+\Delta p)\Delta t}{m}$ より、時間変化しない。