2000 年度前期 解析力学(第 2 学年)　再試験用問題

1. ラグランジュの未定乗数法

$g(x,y,z) \equiv (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 - 1 = 0$ で表わされる楕円体面上での $f(x,y,z) = x + y + z$ の極値を求めよ。さらに、そのとき、f をポテンシャルと考えたときの力と、束縛条件に対する法線とが平行になっていることを示せ。

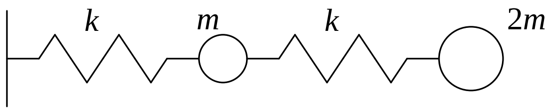
2. 円運動における最小作用の原理

中心力ポテンシャル $V = -b/r$ 中で平面運動する質量 m の質点のラグランジアンを書き下し、オイラー・ラグランジュの運動方程式を求めよ。さらに、円運動 $(x,y) = (R\cos w_0 t, R\sin w_0 t)$ が解であることを確かめ、R と w_0 の関係を求めよ(b 及び A は定数とする)。

次にこの解と、運動 $(x,y) = (R(1-t/T), Rt/T)$ について、それぞれ作用積分 $S = \int_0^T L\,dt$ を計算し、現実の解の方が小さいことを確かめよ。但し $T = p/2w_0$ として、1/4 周期についてのみ考えよ。。

ヒント― 必要に応じて $\int_0^p \cos^2 q\, dq = \int_0^p \sin^2 q\, dq = p/2$ を使え。

3. 基準振動



質量 m, $2m$ の二つの質点が上図のように片側の壁とバネで繋がれ、一次元調和振動をしているとする。この系のラグランジアンを書き下し、運動方程式を導き、基準振動数を求めよ。

ヒント―二重根号に注意せよ。

4. 正準変換

一次元調和振動子のハミルトニアン $H = p^2/2m + mw_0^2 q^2/2$ を、正準変換 $(p,q) \to (P,Q)$ によって、$H = (P^2 + Q^2)w_0/2$ に変換し、使用した変換が確かに正準変換であることを、ポワッソンの括弧式を使って確かめよ。また、位相空間における軌跡が囲む面積が変換前後で不変であることを示せ。ヒント―ポワッソンの括弧式の定義は $[A,B] = \sum_k \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}$

5. 位相空間

一次元調和振動子の位相空間における軌跡について考える。運動エネルギーが E の場合と、$E + \Delta E$ の場合の二つの軌跡が、時刻 $t \sim t + \Delta t$ の間に囲む位相空間の面積は、t に対して一定であることを示せ。但し ΔE, Δt はともに微小量とする。注意―リウビルの定理は、ある時刻における位相空間の領域がその後も面積一定であるというもので、本問とは別物である。