2000　7　21　金　3-4　X407　解析力学　後藤貴行
1

1. ラグランジュの未定乗数法

$g(x,y,z) \equiv (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 - 1 = 0$ で表わされる楕円体面上において、
$f(x,y,z) = xyz$ の極値を求めよ。ヒント— $xyz \neq 0$ としてよい。

2. 調和振動子における最小作用の原理

ラグランジアン $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$ について、オイラー・ラグランジュの方程式を書き下し、
$x = A\sin(w_0 t)$ が解であることを確かめよ(但し $w_0 = \sqrt{k/m}$ 及び A = 任意定数とする)。
次にこの解と、関数 $x = 2Atw_0/p$ について、作用積分 $S = \int_0^t L dt$ を、$t = 0 \sim p/2w_0$ の時間範囲でそれぞれ計算し、現実の解の方が小さいことを確かめよ。
ヒント— 必要に応じて $\int_0^p \cos^2 q\, dq = \int_0^p \sin^2 q\, dq = p/2$ を使え。

3. 基準振動

質量 m, $2m$ の二つの質点が、それぞれ及び両側の壁とバネで繋がれ、一次元調和振動をしているとする。この系のラグランジアンを書き下し、運動方程式を導き、基準振動数を求めよ。
ヒント—二重根号に注意せよ。

4. 磁場中の荷電粒子に対するラグランジアン

磁場中における荷電粒子のハミルトニアン $H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ に対するラグランジアンを $L(\vec{x},\vec{u}) = \vec{p}\cdot\vec{u} - H(\vec{x},\vec{p})$ の定義式から計算せよ(但し、m は質量, e は電荷、c は光速)。
ヒント—正準方程式は $\vec{u} = \partial H/\partial\vec{p}$ 及び $\dot{\vec{p}} = -\partial H/\partial\vec{x}$ である。

5. 位相空間

長さ L の箱の中で一次元往復運動をしている質量 m、運動エネルギー E の質点が位相空間で描く軌跡を図示せよ。
次に、運動エネルギーが E の場合と、$E + \Delta E$ の場合の二つの軌跡が、時刻 $t \sim t + \Delta t$ の間に囲む位相空間の体積(今の場合は一次元運動なので面積)の時間変化を調べよ。但し ΔE, Δt はともに微小量とする。ヒント— 二つの軌跡で囲まれた図形は台形である。