解析力学(SCT66700)~~2022年7月28日(木) 1限(0900−1040)2-408室~~〔追試〕担当　後藤貴行　**【重要】持込不可。途中の計算を書いていない答案は採点しない**

名前〔　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　〕

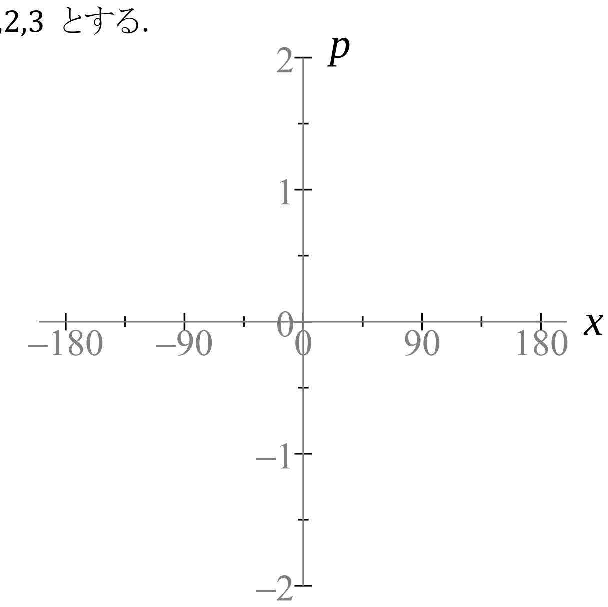
問1.　質量m の質点が，中心力ポテンシャル$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ （但しαは正の定数）のもとで平面内を運動するとき、ラグランジアンL を極座標(r,θ)で書き、Euler-Lagrange 方程式と保存量（エネルギーではない）を求めよ。 次に，この保存量を定数（$= M$）と置いて、運動方程式に代入しθを消去して，rだけの方程式に変形し，どのような運動であるか述べよ．（ヒント）最後の式を，$m\ddot{r} = -\frac{\partial \cdots}{\partial r}$ と言う，ポテンシャルの微分の形に書いてみよ。

問2.　前問で一般化運動量（2つ）を求め、ハミルトニアンHに変換し、正準方程式を求めよ。

問3.　$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$が示す一次元運動について，1) $x = \cos\omega_0 t$ が解であることを示せ．2) この解について作用積分$S = \int_0^{\pi/\omega_0} L dt$を求めよ．
3) $x = -\left|\frac{2\omega_0}{\pi}t - 1\right| + 1$ について，2)と同様に作用積分を計算して比較・議論せよ．

問4.　螺旋（らせん，スパイラル，渦巻きなど）が，空間反転で不変でないことを説明せよ．

問5.　ポテンシャル$U(x) = -\cos x$ において，一次元運動する質量1の質点を考える．1)ラグランジアンを書き， 2)一般化運動量を求め，3)ハミルトニアンHを求め，4)$H = E$ の軌跡の概略を位相空間に表せ（およその形で良い）。但しEは定数とし，$E = -1,0,1,2,3$ とする．



1）三次元空間内の質点のハミルトニアンを$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + mg\vec{q}$ とし，微小な正準変換 $\vec{p} = \vec{P} + \frac{\partial(\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon})}{\partial\vec{q}}$, $\vec{q} = \vec{Q} - \frac{\partial(\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon})}{\partial\vec{q}}$ を考える．但し$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ は微小量の定数ベクトルであるとする．１）正準変換の式を成分毎に書き下し、どのような変換であるか説明せよ（注：x, y, z成分があるので合計六本の式になる）．２)新しい変数$\vec{Q}, \vec{P}$でハミルトニアンを書き、正準方程式を求めよ．　※裏面に解答して下さい．