解析力学（SCT66700）2022 年 7 月 28 日(木) 1限（0900－1040）2-408 室 担当 後藤貴行 **【重要】持込不可。途中の計算を書いていない答案は採点しない**

名前〔　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　〕

問1.　質量m の質点が，中心力ポテンシャル$U(r)=\alpha r$ （但しαは正の定数）のもとで平面内を運動するとき、ラグランジアンL を極座標(r,θ)で書き、Euler-Lagrange 方程式と保存量（エネルギーではない）を求めよ。 次に，この保存量を定数$(=M)$と置いて、もう一方の式に代入しθを消去してrだけの方程式に変形し，どのような運動であるか述べよ． （ヒント）最後の式を，$m\ddot{r}=-\frac{\partial\cdots}{\partial r}$ と言う形に書いてみよ。

$L=½m\vec{v}^2-\alpha r=½m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\alpha r$

$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=mr\dot{\theta}^2-\alpha-m\ddot{r}=0$, $\frac{\partial L}{\partial\theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0$, $mr^2\dot{\theta}$が保存量（$=M$とおく）

$mr\left(\frac{M}{mr^2}\right)^2-\alpha-m\ddot{r}=\frac{M^2}{mr^3}-\alpha-m\ddot{r}=-\frac{d}{dr}\left(\frac{M^2}{2mr^2}+\alpha r\right)-m\ddot{r}=0$, $\therefore U_{\mathrm{eff}}=\frac{M^2}{2mr^2}+\alpha r$の極小点（$r_{\min}=\sqrt[3]{\frac{M^2}{\alpha m}}$ ）を中心に往復運動（横から見た場合）

上から見た場合は、楕円軌道に近いが、厳密な楕円ではなく、また、軌道も閉じない（周回するたびにずれて行く）。重力場とは異なる。

問2.　前問で一般化運動量（2つ）を求め、ハミルトニアンHに変換し、正準方程式を求めよ。

運動量: $\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}=p_r$, $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=p_\theta$

$H=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}-L=½m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\alpha r=½m\left(\frac{p_r^2}{m^2}+\frac{r^2p_\theta^2}{m^2r^4}\right)+\alpha r=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\alpha r$

$\therefore\ \dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$,　$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\alpha$, $\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=0$

問3.　$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$が示す一次元運動について，1) $x=\sin\omega_0 t$ が解であることを示せ．2) この解について作用積分$S=\int_0^{\pi/\omega_0}Ldt$を求めよ．

3) $x=-\left(\frac{2\omega_0}{\pi}t-1\right)^2+1$ について，2)と同様に作用積分を計算して比較・議論せよ．

オイラーラグランジュ方程式に 1)を代入すれば， $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\omega_0^2x+m\ddot{x}=m\omega_0^2\sin\omega_0 t+m(-\omega_0^2\sin\omega_0 t)=0$, よって解である。

$S=\int_0^{\pi/\omega_0}Ldt=\int_0^{\pi/\omega_0}dt\,½m(\omega_0\cos\omega_0 t)^2-½m\omega_0^2\sin^2\omega_0 t=½m\omega_0^2\int_0^{\pi/\omega_0}dt\cos^2\omega_0 t-\sin^2\omega_0 t=½m\omega_0^2\int_0^{\pi/\omega_0}dt\cos 2\omega_0 t=0$

一方，3)の偽の解については、$\frac{\pi}{\omega_0}=a$ とおくと，$x=-4a^{-2}t^2+4a^{-1}t$,　$\dot{x}=-8a^{-2}t+4a^{-1}$ などより，

$S'=\int_0^a dt\ \frac{m}{2}(-8a^{-2}t+4a^{-1})^2-\frac{m\omega_0^2}{2}(-4a^{-2}t^2+4a^{-1}t)^2$

$=\frac{m}{2}\int_0^a dt\ \ 64a^{-4}t^2-64a^{-3}t+16a^{-2}-\omega_0^2(16a^{-4}t^4+32a^{-3}t^3-16a^{-2}t^2)=\frac{m}{2}\left[\frac{64}{3}a^{-1}-32a^{-1}+16a^{-1}-\omega_0^2\left(\frac{16}{5}a-8a+\frac{16}{3}a\right)\right]$

$=\frac{m}{2a}\left[\frac{64}{3}-32+16-\pi^2\left(\frac{16}{5}-8+\frac{16}{3}\right)\right]=\frac{m}{2a}\left[\frac{64-48}{3}+\pi^2\cdot\frac{-48+120-80}{15}\right]=\frac{m}{2a}\left[\frac{16}{3}-\frac{8}{15}\pi^2\right]=\frac{m}{2a}\frac{8}{15}[10-\pi^2]>0$

$\therefore$ S[現実の運動] $<$ S'[あり得ない運動] （最小作用の原理を体現している）

問4.　角運動量が空間反転不変であることを説明せよ。また，時間反転ではどうであるか議論せよ.

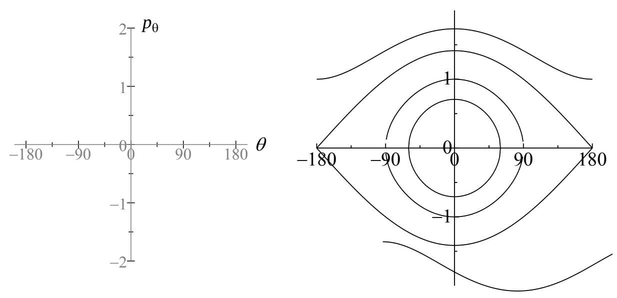
$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}$ は、空間反転すると、$\vec{M}=(-\vec{r})\times(-\vec{p})$ となって不変。 一方，時間反転では、$\vec{p}$のみ反転するので、$\vec{M}$は反転する.

問5.　長さlの軽い棒の先に質量mの質点が取り付けられている剛　体振り子を考えよう。鉛直方向からの振れ角をθ（小さいとは限らない）としてラグランジアン$L(\theta,\dot{\theta})$を書き，θに共役な一般化運動量p_θを求めよ。次に，ルジャンドル変換でハミルトニアン$H(\theta,p_\theta)$に変換せよ．次に，エネルギーの値を$E=0,½mgl,mgl,2mgl,3mgl$ としたとき，各Eに対する振れ幅（θの最大値）を求め，さらに$H(\theta,p_\theta)=E$の軌跡を位相空間に示せ。

$L=½ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$, $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$, $H=p_\theta\dot{\theta}-L=ml^2\dot{\theta}^2-L=½ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta)=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+mgl(1-\cos\theta)=E$

$E=\beta mgl$ と置くと，

$\frac{p_\theta^2}{2m^2gl^3}+(1-\cos\theta)=\beta$，よって，$p_\theta=\pm\overbrace{ml^2\sqrt{2g/l}}^{\text{角運動量の次元}}\sqrt{\beta-1+\cos\theta}$となる。



θの変域は，$\beta<2$では，$\cos\theta>1-\beta$（鉛直付近のみ）の範囲。$\beta>2$では，$\theta=$任意（一周回る）。

具体的には以下の通り.

$\beta\ll 1$では，$\theta\ll 1\mathrm{rad}$ であり，$|\theta|<\sqrt{2\beta}$で，楕円の軌跡. $\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+\frac{mgl\theta^2}{2}=E=\beta mgl$

$\beta=½$で，$\cos\theta>½$であるから，$|\theta|<60°$の範囲.

$\beta=1$で，$\theta=-90\sim 90°$.（左右にちょうど水平まで振れる），$\beta=2$で，$\theta=180$で，頂上でちょうど停止

$\beta>2$で，$\theta=-180\sim 180°$（止まらず，ぐるぐる回る）

問6.　一次元空間内の質点のハミルトニアンを$H=\frac{p^2}{2m}+mgq$とし，微小な正準変換 $p=P+\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}dt$, $q=Q-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p}dt$ を考える（dtは微小量）.

1）元の変数q,p に対して正準方程式を書け．次に，与えられた正準変換にHを代入し，どのような変換であるか記せ.

2）ハミルトニアンHを，正準変換後の変数Q,Pで書き直し，正準方程式を書き，元の変数で書いた正準方程式と，dtの一次の範囲で一致することを示せ（dt^2の項を無視すれば一致すると言うこと）.

3）ポアソンの括弧式$[p,q]$及び$[P,Q]$を計算せよ。但し，一変数の場合のポアソンの括弧式は，$[A,B]=\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}$ である。

（元の変数での正準方程式） $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}$, $\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-mg$

変数変換の式より，$q=Q-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p}dt=Q-\frac{p}{m}dt$, $p=P+\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}dt=P+mgdt$

$\therefore q=Q-\frac{p}{m}dt=Q-\frac{P+mgdt}{m}dt=Q-\frac{P}{m}dt+O(dt^2)$. よって，この正準変換は，時間を$dt$だけ進める変換である（時間推進）.

新変数でハミルトニアンを書くと，$H=\frac{p^2}{2m}+mgq=\frac{(P+mgdt)^2}{2m}+mg\left(Q-\frac{P}{m}dt\right)=\frac{P^2+2Pmgdt}{2m}+mgQ-gPdt+O(dt^2)=\frac{P^2}{2m}+mgQ$

新変数での正準方程式は，$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P}=\frac{P}{m}$,　　$\dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial Q}=-mg$ と，確かに元の変数のそれと一致している。

（元の変数） $[p,q]=\frac{\partial p}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}-\frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial q}=0-1=-1$ （自明な問題）

（新変数）$[P,Q]=\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}-\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\partial(p-mgdt)}{\partial q}\frac{\partial\left(q+\frac{p}{m}dt\right)}{\partial p}-\frac{\partial(p-mgdt)}{\partial p}\frac{\partial\left(q+\frac{p}{m}dt\right)}{\partial q}=0-1=-1$