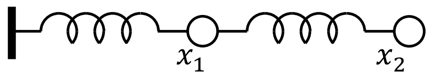
名前〔　　　　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　　　〕

問１．次のうち、空間反転に対して対称なものはどれか？　蚊取り線香、左ネジ、ミュー粒子（ミュオン）、かたつむりの殻、朝顔のツル

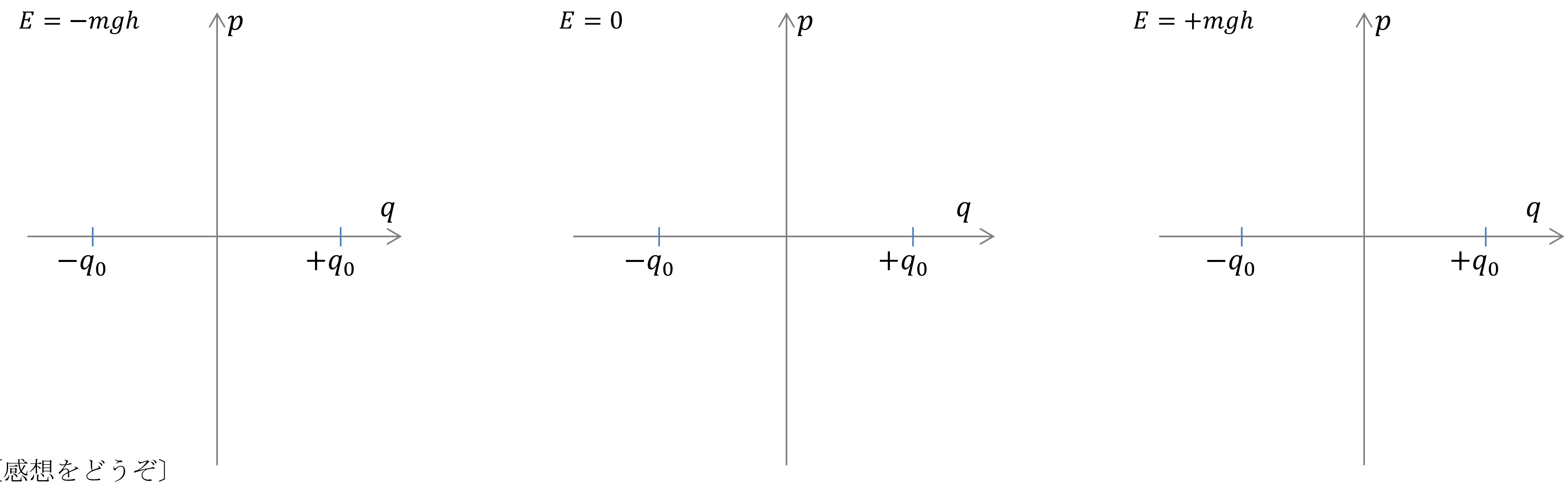
問2.　質量sの質点が中心力場$U=-\frac{m}{x^2+y^2}$（mは定数）で二次元平面内を運動するとき、ラグランジアンLを極座標(r,θ)で書き、一般化運動量及び保存量を求めよ。次に、Lをハミルトニアンに変換し、正準方程式を書け。

問３．静磁場$\vec{H}=(0,0,H_0)$中の磁気モーメント$\vec{\mu}$の運動を調べよ。ここで磁気モーメントは常に$\vec{\mu}$と平行な軸の周りに自転（ $\gamma\vec{M}=\vec{\mu}$ ）している。γ及び磁気モーメントの大きさ$|\vec{\mu}|=\mu_0$は定数とする。（ヒント）トルク方程式は $\dot{\vec{M}}=\vec{T}$、また、トルクは$\vec{T}=\vec{H}\times\vec{\mu}$ で与えられる。

問４．２つの質点mがバネkでつながれている（左端は壁に固定）。釣合い位置からの変位をx_1,x_2 としてLを書き，運動方程式を行列の形で書き、規準振動数を求め、振動の様子を図示せよ。ヒント$\sqrt{5}\simeq 2.2$である。



問５．深さh，幅$2q_0$の井戸型ポテンシャルについて、質点の全エネルギーが$E=-mgh$, 0 , $+mgh$の三つの場合について、位相空間での軌跡を、方向を矢印で示して図示せよ（y 軸の値を必ず書け）。ヒント）$E=0$及び$+mgh$では軌跡は二つある。



〔感想をどうぞ〕

名前〔　　　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　　　　〕

問１．次のうち、空間反転に対して対称なものはどれか？　蚊取り線香、ネジ、ミュー粒子（ミュオン)、かたつむりの殻

すべて対称でない（反転すると別物になる)。

問２．質量sの質点が中心力場$U=-\frac{m}{x^2+y^2}$で二次元平面内を運動するとき、ラグランジアンLを極座標(r,θ)で書き、一般化運動量及び保存量を求めよ。但し、mは定数である。次に、Lをハミルトニアンに変換し、正準方程式を書け。

$L=\frac{s}{2}\dot{\vec{x}}^2+\frac{m}{x^2+y^2}=\frac{s}{2}\left[(\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\dot{\theta})^2+(\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\dot{\theta})^2\right]+\frac{m}{r^2}=\frac{s}{2}[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2]+\frac{m}{r^2}$, $p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=s\dot{r}$, $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=sr^2\dot{\theta}$(保存量)

$H=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}-L=\frac{s}{2}[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2]+\frac{m}{r^2}=\frac{p_r^2}{2s}+\frac{p_\theta^2}{2sr^2}-\frac{m}{r^2}$, 正準方程式は$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{s}$, $\dot{p}_\mathrm{r}=-\frac{\partial H}{\partial r}=-\frac{2m}{r^3}$, $\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_r}{sr^2}$, $\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=0$(保存量)

問３．磁場$\vec{H}=(0,0,H_0)$中の磁気モーメント$\vec{\mu}$の運動を調べよ。ここで磁気モーメントは常に$\vec{\mu}$と平行な軸の周りに自転（ $\gamma\vec{M}=\vec{\mu}$ ）しているとする。また、H_0 , γ、及び磁気モーメントの大きさ$|\vec{\mu}|=\mu_0$は定数とする。（ヒント）トルク方程式 $\dot{\vec{M}}=\vec{T}$、トルク$\vec{T}=\vec{H}\times\vec{\mu}$ である。

トルク方程式より、$\dot{\vec{M}}=\vec{T}=\vec{H}\times\vec{\mu}$、右辺に$\gamma\vec{M}=\vec{\mu}$を代入すれば、$\dot{\vec{\mu}}=\gamma\vec{H}\times\vec{\mu}=\gamma(-H_0\mu_y,+H_0\mu_x,0)$。直ちに$\mu_z=$定数
よって、$\ddot{\mu}_x=-\gamma H_0\dot{\mu}_y=-(\gamma H_0)^2\mu_x$となり、この解は、$\mu_x=A\cos(\gamma H_0t+\phi)$　(A,ϕは定数）さらに、$\mu_y=A\sin(\gamma H_0t+\phi)$
最後に$|\vec{\mu}|=\mu_0$より、$A^2+\mu_z^2=\mu_0^2$なので、$\mu_z=\mu_0\cos\theta$（θは定数）と置けば、$A^2=\mu_0^2\sin^2\theta$となるので、結局、
$\vec{\mu}=(\mu_0\sin\theta\cos(\gamma H_0t+\phi),\mu_0\sin\theta\sin(\gamma H_0t+\phi),\mu_0\cos\theta)$を得る。

問４．２つの質点mがバネkでつながれている（左端は壁に固定)。釣合い位置からの変位をx_1,x_2 としてLを書き，運動方程式を行列の形で書き、規準振動数を求め、振動の様子を図示せよ。ヒント$\sqrt{5}\simeq 2.2$である。

$L=\frac{m}{2}\dot{x}_1^2+\frac{m}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k}{2}x_1^2-\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2$ より、$m\ddot{x}_1=-k(2x_1-x_2)$, $m\ddot{x}_2=k(x_1-x_2)$ を行列表示すれば、$m\ddot{\vec{x}}=-k\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\vec{x}=-kA\vec{x}$

よって Aを対角化すると固有値は$(2-\lambda)(1-\lambda)-1=0$より、$\lambda^2-3\lambda+1=0$となる。よって$\lambda_\pm=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ を得る。次に固有ベクトルは、

$2a-b=\lambda a$及び$-a+b=\lambda b$であるから、$(a,b)=\left(\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2},1\right)$となる。およその値は$\lambda_-$が$(0.6,1)$で、$\lambda_+$が$(-1.6,1)$である。これらを

図示すると、遅い方λ_-が（—→　———→）で、速い方λ_+が（←——　—→）

問５．深さ h，幅$2q_0$の井戸型ポテンシャルについて、質点の全エネルギーが$E=-mgh$, 0 , $+mgh$の三つの場合について、位相空間での軌跡を、方向を矢印で示して図示せよ（y 軸の値を必ず書け)。注）$E=0$及び$+mgh$では軌跡は二つある。

$E=-mgh$の場合、質点は、井戸の底のみで存在出来て、かつ、静止している。軌跡は$\pm q_0$の範囲の x 軸上の「点」になる。

$E=0$の場合、質点は井戸の底のみを、速さ$\sqrt{gh}$で往復（軌跡は時計回り四角）するか、又は、井戸の外側で静止（ x 軸上の点)。

$E=+mgh$の場合、質点は、井戸の外では速さ$\sqrt{gh}$で走り、井戸の中で$\sqrt{2gh}$で走る。右向きと左向きの軌跡がある。

〔感想をどうぞ〕