解析力学　２０１６年7月２１日(木) １限（３－２２７）ＳＣＴ６６７００担当者　後藤貴行　　　　【重要】途中の計算を書いていない答案は採点しない

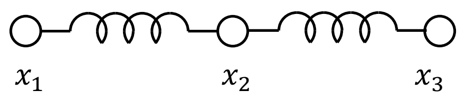
名前〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　　　　　　〕

問１．空間反転$\vec{x} \to -\vec{x}$ に対し，「速度」と「角運動量」，「並進運動量」，「運動エネルギー」はどう変化するか？

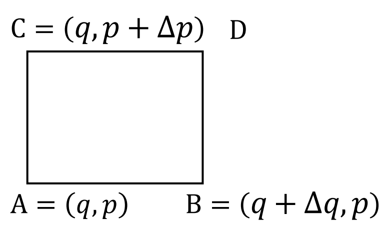
問2.　二次元平面の中心力場$U = -½\alpha r^{-2}$で運動する質点（質量m）のラグランジアンを極座標(r, θ)で書き，オイラー・ラグランジュ方程式と各座標に共役な運動量を求め，保存量があるか調べよ。

問３．前問のラグランジアンをハミルトニアンに変換し，正準方程式を求めよ。

問４．質量mの質点が三つ，バネ定数kのバネでつながれている。両端は自由端とする。それぞれの質点の釣り合い位置からの変位をx_1, x_2, x_3 とするとき，ラグランジアンを書いて，オイラー・ラグランジュ方程式を行列の形で書け。さらに規準振動数（３つ）と規準座標を求め、後者を図示せよ。



問５．ハミルトニアン$H(q, p)$に従う質点の運動を位相空間で調べよう。時刻ゼロにおいて，点(q, p)をAとし，わずかにずれた点を，それぞれB，C，Dとして図のような位相空間内の長方形を考える。Aが微小時間δt後に移る点A′を求めよ。同様に，BとCが微小時間δt後に移る点B′とC′を求めよ。
そして、平行四辺形A′B′C′D′の面積を求めよ。但し、δtの二次以上は落して良い。



問X. 時間の余った人は、問２で質点が中心に向かって激突する条件を求めて見よ。

〔感想をどうぞ〕

名前〔　　　　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　　〕

問１．空間反転 $\vec{x} \to -\vec{x}$ に対し，「速度」と「角運動量」,「並進運動量」,「運動エネルギー」はどう変化するか？
速度反転，角運動量不変，並進運動量反転，運動エネルギー不変

問2.　二次元平面の中心力場$U = -½\alpha r^{-2}$で運動する質点(質量m)のラグランジアンを極座標(r,θ)で書き, オイラー・ラグランジュ方程式と各座標に共役な運動量を求め, 保存量があるか調べよ。

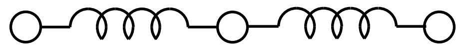
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + ½\alpha r^{-2},\ \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mr\dot{\theta}^2 - \alpha r^{-3} - m\ddot{r} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0,\ p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\text{(保存)}$$

問３．前問のラグランジアンをハミルトニアンに変換し，正準方程式を求めよ。

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - L = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - ½\alpha r^{-2} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - ½\alpha r^{-2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \alpha r^{-3},\ \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_r} = \frac{p_r}{m},\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

問４．質量mの質点が三つ，バネ定数kのバネでつながれている。両端は自由端とする。それぞれの質点の釣り合い位置からの変位をx_1, x_2, x_3 とするとき，ラグランジアンを書いて，オイラー・ラグランジュ方程式を行列を使って書け。さらに、規準振動数（３つ）と規準座標を求め、後者を図示せよ。

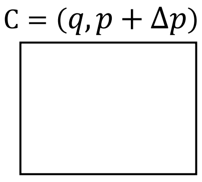


$$L = ½m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - ½k(x_1 - x_2)^2 - ½k(x_2 - x_3)^2,\ m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2),\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3),\ m\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3)$$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x},\ (-1-\lambda)\left((-2-\lambda)(-1-\lambda) - 1\right) - (-1-\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+2) - 2(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda) = 0,\ \lambda = 0, -1, -3$$

規準振動数は$\omega = 0, \sqrt{k/m}, \sqrt{3\,k/m}$　　規準座標（固有ベクトル）は，$\lambda = 0$（振動せず並進）が，$-a + b = 0$及び$b - c = 0$より$(1,1,1)$
$\lambda = -1$が，$-a + b = -a$及びa$- 2b - c = -b$より，$(1,0,1)$、$\lambda = -3$が，$-a + b = -3a$及び$b - c = -3c$より，$(1,-2,1)$
図示すると、(→，→，→)，(→，○，→)，(→，⟵，→) となる。○は静止を表すことにする。
もちろん逆向きに（←，←，←)，(←，○，←)，(←，⟶，←) と描いても可。

問５．ハミルトニアン$H(q,p)$に従う質点の運動を位相空間で調べよう。時刻ゼロにおいて，点(q,p)をAとし，わずかにずれた点を，それぞれB，C，Dとして図のような位相空間内の長方形を考える。Aが微小時間δt後に移る点A′を求めよ。同様に，BとCが微小時間δt後に移る点B′とC′を求めよ。
そして、平行四辺形A′B′C′D′の面積を求めよ。但し、δtの二次以上は落して良い。



$$\mathrm{A}' = \left(q + \frac{\partial H}{\partial p}(q,p)\delta t, p - \frac{\partial H}{\partial q}(q,p)\delta t\right)$$

$$\mathrm{B}' = \left(q + \Delta q + \frac{\partial H}{\partial p}(q+\Delta q,p)\cdot\delta t, p - \frac{\partial H}{\partial q}(q+\Delta q,p)\cdot\delta t\right) = \left(q + \Delta q + \frac{\partial H}{\partial p}(q,p)\delta t + \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}(q,p)\Delta q\delta t,\ p - \frac{\partial H}{\partial q}(q,p)\delta t - \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q,p)\Delta q\delta t\right)$$

$$\mathrm{C}' = \left(q + \frac{\partial H}{\partial p}(q,p+\Delta p)\delta t, p + \Delta p - \frac{\partial H}{\partial q}(q,p+\Delta p)\delta t\right) = \left(q + \frac{\partial H}{\partial p}(q,p)\delta t + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(q,p)\delta t\Delta p,\ p + \Delta p - \frac{\partial H}{\partial q}(q,p)\delta t - \frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}(q,p)\Delta p\delta t\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \left(\Delta q + \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}(q,p)\Delta q\delta t, -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q,p)\Delta q\delta t\right),\ \overrightarrow{\mathrm{A'C'}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(q,p)\delta t\Delta p, \Delta p - \frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}(q,p)\Delta p\delta t\right)$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \times \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right| = \left(\Delta q + \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}(q,p)\Delta q\delta t\right)\left(\Delta p - \frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}(q,p)\Delta p\delta t\right) + \mathrm{O}(\delta t^2) = \Delta q\Delta p + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}(q,p) - \frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}(q,p)\right]\Delta q\Delta p\delta t + \mathrm{O}(\delta t^2) = \Delta q\Delta p + \mathrm{O}(\delta t^2)$$

ちなみに，微小時間経過後の点の移動（例えば$\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$）は正準変換と見ることが出来て、実は母関数はハミルトニアン自身である。よって、Hのことを時間推進演算子とも呼ぶ。

問 X. 時間の余った人は、問２で、質点が中心に向かって激突する条件を求めて見よ。角運動量をMとすると$m\ddot{r} = (M^2/m)r^{-3} - \alpha r^{-3}$より，$M^2/m < \alpha$（但し、奈落の底に落ちてもまた出て来る。）
〔感想をどうぞ〕例）今年は出席者が全員、大変熱心に聞いてくれたのでついつい進み過ぎてしまった。