数理物理演習 III　　　　　　**レポート問題 2 (講義の復習)**　　　　　7. June 2000

—— 角運動量演算子$\vec{l}=(\vec{r}\times\vec{p})$の固有関数と固有値

1) $\vec{l}=(\vec{r}\times\vec{p})$**をデカルト座標で書き下し、各成分**$l_x$, l_y, l_z**間の交換関係を求めよ。**

2) $[l_z,l_x^2]$**及び、**$[l_z,l_y^2]$**を計算し、**$[l_z,l_z^2]=0$**と片々足しあわせることで、**$[l_z,l^2]$**を求めよ。**

但し$l^2=l_x^2+l_y^2+l_z^2$**である。**

3) **以下、**$\hbar\vec{J}\equiv\vec{l}$**として**$J$**について考える。**$\hbar J_\pm=l_\pm=l_x\pm il_y$**と定義する。**

J_+J_-**及び**J_-J_+**を計算せよ** (**もちろん、**l_+l_-**を計算しても良い**)**。**

4) J^2**及び**J_z**の両方の演算子に対して、同時に固有関数となる**$|jm\rangle$**を考える。固有値はそ**

れぞれ、$j(j+1)$**及び**j_z**とする。すなわち**$J^2|jm\rangle=j(j+1)|jm\rangle$ **及び、**$J_z|jm\rangle=m|jm\rangle$**が**

成り立つとする。

この$|jm\rangle$**に対して**$\langle jm|J_+J_-|jm\rangle$**及び、**$\langle jm|J_-J_+|jm\rangle$**を計算せよ。**

5) $\langle jm|jm\rangle\geq 0$**の条件を、前問** 4)**の結果に適用して、**j **と** m **の間の条件式を求めよ。**

6) **前問** 5)**の結果から、**$J_+|j,j\rangle$**及び**$J_-|j,-j\rangle$**の値は何でなければならないか示せ。**

6) $J_\pm|jm\rangle$**は**J_z**の固有ベクトルであるかどうかを調べ、もしそうであれば固有値を求めよ。**

ヒント—J_z**を**$J_\pm|jm\rangle$**に作用させてみよ。**

7) J^2**と**$J_\pm$**を行列で書いてみよ。特に**$J=\frac{1}{2}$**の場合にも書いてみよ。**

基底ベクトルは$\{|j,-j\rangle,|j,-j+1\rangle,\cdots|j,+j\rangle\}$**とする。ヒント—次元は**$2j+1$**である。**

後藤 (3-335B, `gotoo-t@ sophia.ac.jp`)