数理物理演習 III　　　　　　No.4　　　　　　14. June　2000

―― 微分演算子としての角運動量$\vec{l}=(\vec{r}\times\vec{p})$の固有関数と固有値

1) $\hbar J_z \equiv l_z = (\vec{r}\times\vec{p})_z = \frac{\hbar}{i}(\vec{r}\times\nabla)_z$ をデカルト座標から極座標に変換し、$l_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ を示せ。
ヒント―$\vec{l}$ は回転を表す演算子なので r は定数とする。よって $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ などを使えばよい。なお、以下の設問でも全て r は定数である。

2) 同様に l_x, l_y, $l_\pm = l_x \pm i l_y$ を極座標で表わせ。

3) 同様に、$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$ を極座標で表わせ。ヒント $J_+J_- + J_-J_+ = 2J_x^2 + 2J_y^2$ を使うと少しは計算が楽になる。

　前問までの結果を使って、l^2 と l_z の固有関数 $|jm\rangle = F_j^m(\theta,\varphi)$ を具体的に求めよう。
　まず、J^2 と J_z は交換するので、これらに対し、同時に固有ベクトルとなる関数が存在する。J^2 と J_z の固有値を $j(j+1)$ と m とし、固有関数を $|jm\rangle$ と書く。すなわち、
　$J^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle$　及び　$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle$　である。この固有関数に対する昇降演算子の働きは $[J_z, J_\pm]$ を使って調べると、$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|jm\pm1\rangle$ となることがわかり、ベクトルのノルム(絶対値)に対する $\| J_\pm |jm\rangle \|^2 > 0$ を使うと、m は $m=-j,-j+1,\ldots,j-1,j$ の範囲に限定されることがわかる(「レポート問題 2―講義の復習」を参照のこと)。

4) l_z, $l_\pm$ の満たす微分方程式 $l_z F_j^j(\theta,\varphi) = jF_j^j(\theta,\varphi)$ 及び　$l_\pm F_j^{\pm j}(\theta,\varphi) = 0$ から、$F_j^j(\theta,\varphi)$ を求めよ。規格化は不要(問題 6)。ヒント― 一階の微分方程式を変数分離で解くだけ。

5) $F_j^m(\theta,\varphi)$ が θ,φ の一価関数であるという条件から得られる m の条件は何か。
ヒント― 一価関数の条件とは $F_j^m(\theta,\varphi+2\pi) = F_j^m(\theta,\varphi)$ である。

6) 前問で求めた $F_j^j(\theta,\varphi)$ を $\int \left|F_j^j\right|^2 d\Omega = 1$ の条件で規格化せよ。なおこの条件では $F_j^j(\theta,\varphi)$ にかかる定数 $e^{i\alpha}$ までは決まらない。$e^{i\alpha}$ は $F_j^0(0,0)$ が正の実数という条件から決める(慣習)。
ヒント―もちろん $d\Omega = d\varphi \sin\theta d\theta$ であり(立体角)、積分範囲は $\varphi = 0 \sim 2\pi$, $\theta = 0 \sim \pi$。

7) このようにして求めた $F_j^j(\theta,\varphi)$ に次々と J_- を作用させて行けば、$F_j^{j-1}(\theta,\varphi)$, $F_j^{j-2}(\theta,\varphi)$,..., $F_j^{-j}(\theta,\varphi)$ が得られる。具体的に $F_0^0, F_1^{-1}, F_1^0, F_1^1$ などを求めてみよ。また、$l_-F_1^{-1}$ や $l_+F_1^{+1}$ が 0 になるかどうかも確かめよ。

8) $F_j^m(\theta,\varphi)$ に J^2 と J_z を実際に作用させ、固有値 $j(j+1)$ と m が出るかどうか確かめよ。

9) ある波動関数 $\Psi(\theta,\varphi)$ が $\Psi = c_{00}|0,0\rangle + c_{11}|1,1\rangle + c_{10}|1,0\rangle + c_{1-1}|1,-1\rangle\cdots$ のように、$F_j^m(\theta,\varphi)$ で展開できるとする。この波動関数の角運動量 J^2 と J_z を求めよ。

5/31 後藤 (3-335B, gotoo-t@sophia.ac.jp)