

問1 調和振動子

質量 m , 振動数 ω の調和振動子の固有状態をエネルギーの低い方から順に、 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ とし、固有エネルギーを $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ とする。以下の問いに答えよ。必要に応じて昇降演算子

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} p \text{ の公式 } a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \text{ を使え。}$$

- 1) 上の固有状態 $|0\rangle$ 及び $|1\rangle$ に x を作用させた状態を $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ の線形結合で表せ。また、 $|0\rangle$ 及び $|1\rangle$ は x の固有状態になっているかどうかを述べよ。
- 2) まず摂動としてハミルトニアンに $V = \epsilon x$ の項が加わった場合、 $|0\rangle$ 及び $|1\rangle$ のエネルギー準位の変化、及び波動関数の変化を一次の摂動で求めよ。但し定数 ϵ は極めて小さいとする。
- 3) 今度は摂動として $V = \epsilon x \cos \Omega t$ の項が加わった場合、 $|0\rangle$ 及び $|1\rangle$ がどの準位に遷移するかを調べよ。遷移が起こる定数 Ω の条件についても述べよ。但し定数 ϵ は極めて小さいとする。
- 4) 一般に調和振動子を量子力学的に扱わねばならない条件(質量 m , ばね定数 k , 温度 T などの間の関係)について考察せよ。

問2 角運動量の合成

相互作用している大きさ $S = \frac{1}{2}$ の二つのスピン \vec{S}_1, \vec{S}_2 がある。ハミルトニアンを $H = J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ とし、二つのスピンの状態を表す波動関数を $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ とする。例えば、 $|\downarrow\uparrow\rangle$ は一番目のスピンの状態が $S_{1z} = -\frac{1}{2}$ で、二番目のスピンの状態が $S_{2z} = +\frac{1}{2}$ であることを示す。但し、 J は正である ($J > 0$) とする。

- 1) ハミルトニアンの固有状態を全て求めよ。
- 2) 上の四つの固有状態の合成角運動量の大きさ $S^2 = |\vec{S}_1 + \vec{S}_2|^2$ 及び $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ を各々記せ。
- 3) z 軸方向の静磁場 H_0 が加わった場合、これらの四つの固有状態のエネルギーを求めよ。四つの固有状態の中でもっともエネルギーの低い状態はどれか。また、それが定数 H_0 によって変わるかどうかを図示して示せ。
- 4) 前問で静磁場がかかった状態でさらに、 x 軸方向の弱い振動磁場が加わった場合、どの二つの固有状態間に遷移が起きるかを調べよ。摂動ハミルトニアンは $h_1 \cdot \mathbf{w}$ を定数として $V = h_1 \cdot (S_{1x} + S_{2x}) e^{-i\mathbf{w}t}$ である。(4 $C_2 = 6$ 通りの組み合わせを全て調べよ)。

* コメントをどうぞ 後藤(3-335B, gotoo-t@sophia.ac.jp, <http://www.ph.sophia.ac.jp/~goto-ken>)