演習 No.6　　　　　　　　　　　解答補足　　　　　　　　　　　'2000, 10/3

(問題・レポート・補足プリントプリントは、http://www.ph.sophia.ac.jp の研究室紹介→低温物性研究室→講義・学生実験からダウンロードできます)

□ふたつの角運動量$\vec{j}_1, \vec{j}_2$が合成された$J = j_1 + j_2$かつ$M = j_1 + j_2$の状態から、全ての状態を求める

$M = j_1 + j_2$	$M = j_1 + j_2 - 1$	$M = j_1 + j_2 - 2 \cdots$
$\vert j_1\rangle\vert j_2\rangle \Rightarrow$	$a\vert j_1 - 1\rangle\vert j_2\rangle + b\vert j_1\rangle\vert j_2 - 1\rangle \Rightarrow$	$\boldsymbol{a}\vert j_1 - 2\rangle\vert j_2\rangle + \boldsymbol{b}\vert j_1 - 1\rangle\vert j_2 - 1\rangle + \boldsymbol{g}\vert j_1\rangle\vert j_2 - 2\rangle \Rightarrow$
	↓**直交化**	↕**直交化している筈**
	$b\vert j_1 - 1\rangle\vert j_2\rangle - a\vert j_1\rangle\vert j_2 - 1\rangle \Rightarrow$	$\boldsymbol{a}'\vert j_1 - 2\rangle\vert j_2\rangle + \boldsymbol{b}'\vert j_1 - 1\rangle\vert j_2 - 1\rangle + \boldsymbol{g}'\vert j_1\rangle\vert j_2 - 2\rangle \Rightarrow$
		↓**直交化**
		$\boldsymbol{a}''\vert j_1 - 2\rangle\vert j_2\rangle + \boldsymbol{b}''\vert j_1 - 1\rangle\vert j_2 - 1\rangle + \boldsymbol{g}''\vert j_1\rangle\vert j_2 - 2\rangle \Rightarrow$

但し、$\Rightarrow$は、J_-を作用させることを示し、↓は線形変換で直交化を行うことを示す。

$a, b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{g}', \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}'', \boldsymbol{g}''$ は定数(昇降演算子の公式を使って求める)。

○右への進行($\Rightarrow$)は、$M = -J$ になるまで続ける(例えば最上段は$-(j_1 + j_2)$まで)。

○下への進行(↓)は、元の段でJ_-を作用させても項数が増えなくなるまで続ける。

具体的には、$J_-\{\cdots + \boldsymbol{z}\vert m_1\rangle\vert m_2 = -j_2\rangle\}$のところで、最後の項が消えてしまうので、それ以上項数は増えなくなる。さらに、最初の項が$J_-\{\boldsymbol{a}\vert m_1 = -j_1\rangle\vert m_2 = j_2\rangle + \cdots\}$となると、項数は減少に転じる。

なお、直交化で下へ降りるたびに、Jは 1 ずつ減少して行き、最後は$J = \vert j_1 - j_2\vert$となる。

易しい例

```
                    項数 1   2   1
j₁=½, j₂=½  (J=1)○⇒○⇒○
                      ↓
               (J=0)○
```

```
                    項数 1   2   2   1
j₁=½, j₂=1   (J=3/2)○⇒○⇒○⇒○
                        ↓
               (J=1/2)○⇒○
```

```
                    項数 1   2   3   2   1
j₁=1, j₂=1   (J=2)○⇒○⇒○⇒○⇒○
                      ↓
               (J=1)○⇒○⇒○
                        ↓
                 (J=0)○
```