5) ルジャンドルの陪関数 (*associated Legendre function*) $P_l^m = \left(1-z^2\right)^{m/2}\dfrac{d^m P_l}{dz^m}$ が、

$\dfrac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)\dfrac{d}{dz}P\right)+\left(l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-z^2}\right)P=0$ を満足することを証明する。

まずルジャンドルの微分方程式 $\left(1-z^2\right)P''-2zP'+l(l+1)P=0$ を m 回微分すると、

積の多回微分から出てくる ${}_mC_0$, ${}_mC_1$, ${}_mC_2$ 等の係数に注意して、

$$\underbrace{\left(1-z^2\right)P^{(m+2)}}_{{}_mC_0}-\underbrace{2mzP^{(m+1)}}_{{}_mC_1}-\underbrace{\frac{m(m-1)}{2}2P^{(m)}}_{{}_mC_2}-\underbrace{2zP^{(m+1)}}_{{}_mC_0}-\underbrace{2mP^{(m)}}_{{}_mC_1}+\underbrace{l(l+1)P^{(m)}}_{{}_mC_0}=0$$

$$\therefore \left(1-z^2\right)P^{(m+2)}-2z(m+1)P^{(m+1)}-m(m+1)P^{(m)}+l(l+1)P^{(m)}=0$$

ここで、$v\equiv P^{(m)}=\dfrac{d^m}{dz^m}P_l(z)$ と置けば、

$$\left(1-z^2\right)v''-2(m+1)zv'+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]v=0$$

となるので、さらに、$w=\left(1-z^2\right)^{m/2}v$ と置いて、$v=\left(1-z^2\right)^{-m/2}w$ を代入すると、

$$\left[\left(1-z^2\right)w''-2zw'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right)w\right]\left(1-z^2\right)^{-m/2}=0$$

$$\therefore \left(1-z^2\right)w''-2zw'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right)w=0$$

を得る。確かに $P_l^m(z)\propto\left(1-z^2\right)^{m/2}P_l^{(m)}$ でよい。あとは規格化定数を決めるだけ(問 6)。

また、P_l は l 次の多項式であるから、$m\le l$ の条件が自動的に課せられる。

6) $\int_{-1}^{+1}P_l^m(z)P_k^m(z)dz$ を計算して、直交規格化条件を求める。

[A] $l\neq k$ のとき、$\int_{-1}^{+1}dzP_l^mP_k^m=0$ を示す。

$l\neq k$ のとき P_l^m の満たす微分方程式に左から P_k^m をかけて積分してみる。0 の積分は 0 であるから

$$\int_{-1}^{+1} dz\left[P_k^m \frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}P_l^m\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)P_k^m P_l^m\right]=0 \quad \text{—A1}$$

となり、第 1 項目は部分積分で、(第 1 項)$=-\int_{-1}^{+1} dz\left[\left(P_k^m\right)'\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}P_l^m\right]$

と、k と l に関して対称的な形になるので、逆に P_k^m の微分方程式に P_l^m をかけて積分してみると、

$$\int_{-1}^{+1} dz\left[P_l^m \frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}P_k^m\right)+\left(k(k+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)P_l^m P_k^m\right]=0 \quad \text{—A2}$$

よって、同じく第 1 項目は部分積分で、$=-\int_{-1}^{+1} dz\left[\left(P_l^m\right)'\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}P_k^m\right]$ となり、前のものと、完全に等しくなる。A1 から A2 を引くと、結局、

$$0=\int_{-1}^{+1} dz\left[l(l+1)-k(k+1)\right]P_l^m P_k^m=\left[l(l+1)-k(k+1)\right]\int_{-1}^{+1} dz P_l^m P_k^m$$ を得る。

[B] $l=k$ の場合の規格化定数を求める。方針は、P_l^m の m に関する漸化式を作る。

P_l^m の定義式 $P_l^m=\left(1-z^2\right)^{m/2}\frac{d^m P_l}{dz^m}$ を微分して、

$$\frac{d}{dz}P_l^m=\frac{m}{2}(-2z)\left(1-z^2\right)^{m/2-1}\frac{d^m P_l}{dz^m}+\left(1-z^2\right)^{m/2}\frac{d^{m+1}P_l}{dz^{m+1}}=-\frac{mz}{1-z^2}P_l^m+\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}P_l^{m+1}$$

この両辺に $\sqrt{1-z^2}$ をかけて、

$$\therefore \sqrt{1-z^2}\frac{d}{dz}P_l^m=-\frac{mz}{\sqrt{1-z^2}}P_l^m+P_l^{m+1}$$

の漸化式を得る。これを両辺自乗すると、

$$\left(P_l^{m+1}\right)^2=\left[\sqrt{1-z^2}\frac{d}{dz}P_l^m+\frac{mz}{\sqrt{1-z^2}}P_l^m\right]^2=\left(1-z^2\right)\left(\frac{dP_l^m}{dz}\right)^2+2mzP_l^m\frac{dP_l^m}{dz}+\frac{m^2z^2}{1-z^2}\left(P_l^m\right)^2$$

[C] 漸化式を積分して、部分積分で、微分の項 $\frac{dP_l^m}{dz}$ を消去してしまう。

$$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^{m+1}\right)^2 = \int_{-1}^{+1}\left\{\left(1-z^2\right)\left(\frac{dP_l^m}{dz}\right)^2 + 2mzP_l^m\frac{dP_l^m}{dz} + \frac{m^2z^2}{1-z^2}\left(P_l^m\right)^2\right\}dz$$

となる。部分積分で、第 1、2 項の P'^2, PP' を P^2 の形に持って行く。まず、部分積分で

第 1 項 $= -\int_{-1}^{+1} dzP_l^m \frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}P_l^m\right)$

となるが、これは、P_l^m が満たす微分方程式($m \neq 0$)の前半部分である。よって、

第 1 項 $= \int_{-1}^{+1} dzP_l^m\left[l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]P_l^m = \int_{-1}^{+1} dz\left[l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\left(P_l^m\right)^2$ を得る。

同様に第 2 項も部分積分して、$PP' = \left(\frac{1}{2}P^2\right)'$ に注意すれば、

第 2 項 $= -2m\int_{-1}^{+1} dz\frac{1}{2}\left(P_l^m\right)^2$ を得る。以上をあわせれば、

$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^{m+1}\right)^2 = \int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^m\right)^2\left[l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-z^2}-m+\frac{m^2z^2}{1-z^2}\right]$ となるが、

ここで、[ ]の中身は、結局 z が消えてしまい、

$$[\ ] = l(l+1)-m-\frac{m^2\left(1-z^2\right)}{1-z^2} = l(l+1)-m(m+1) = l^2-m^2+l-m = (l-m)(l+m+1)$$

であるので、結局、

$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^{m+1}\right)^2 = (l-m)(l+m+1)\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^m\right)^2$ という漸化式を得る。

[D] 漸化式のインデックス m を、$m \to m-1$ とずらして行き、$P_l^0 \equiv P_l$ まで持っていく。

$$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^m\right)^2 = (l-m+1)(l+m)\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^{m-1}\right)^2$$

$$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^{m-1}\right)^2 = (l-(m-1)+1)(l+m-1)\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^{m-1}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^2\right)^2 = (l-1)(l+2)\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^1\right)^2$$

$$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^1\right)^2 = (l)(l+1)\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^0\right)^2$$

となり、$P_l^0 = \left(1-z^2\right)^0 P_l^{(0)} = P_l$ とルジャンドルの多項式まで行き着くので、整理すれば

$$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^m\right)^2 = (l-m+1)(l-(m-1)+1)\cdots l\cdot(l+m)(l+m-1)\cdots(l+1)\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l\right)^2$$

$$= \frac{(l)!}{(l-m)!}\frac{(l+m)!}{(l)!}\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l\right)^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l\right)^2$$ を得る。

[E] 最後にルジャンドル多項式の規格化定数を求めて完成。

やり方：母関数展開の自乗 $\frac{1}{1-2rz+r^2} = \left(\sum_{l=0} P_l(z)r^l\right)\left(\sum_{m=0} P_m(z)r^m\right)$ を z で積分し、直交性から、クロスタームを消してしまう。

$$左辺 = \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{1+r^2-2rz} = -\frac{1}{2r}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{z-\left(1+r^2\right)/2r} = -\frac{1}{2r}\left[\log\left(z-\left(1+r^2\right)/2r\right)\right]_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{2r}\log\left|1-\left(1+r^2\right)/2r\right| + \frac{1}{2r}\log\left|-1-\left(1+r^2\right)/2r\right| = \frac{1}{r}\log\left|\frac{1+r}{1-r}\right|$$

右辺は、P_l の直交性 (P_l^m と同じ方法で簡単に証明可)を認めれば、

右辺 $= \sum_{l=0} r^{2l}\int_{-1}^{+1} dz P_l^2(z)$、 となる。両辺を r に関してテイラー展開すると、

$\frac{1}{1\pm x} = 1\mp x + x^2 \mp x^3 + x^4\cdots$、$\log\frac{1}{1\pm x} = \pm\left(x\mp\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\cdots\right)$ に注意して、

$$左辺 = \frac{1}{r}\left(2r+2\frac{r^3}{3}+2\frac{r^5}{5}\cdots\right) = 2\left(1+\frac{r^2}{3}+\frac{r^4}{5}\cdots\right)$$

右辺 $= S_0 + r^2 S_1 + r^4 S_2\cdots$　(但し、$S_l \equiv \int_{-1}^{+1} dz\left(P_l(z)\right)^2$)

であるので、係数を比較して $S_l = \frac{2}{2l+1}$ を得る。以上より、

$\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l^m\right) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} dz\left(P_l\right)^2 = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$　となるので、$\Theta = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)$