1. 空間・時間の対称性と保存量について説明せよ。

解答例）・空間が一様であればラグランジアン$L(q,\dot{q})$は座標qに依存しないので，$0=\frac{\partial L}{\partial q}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$となり，$q$に共役な一般化運動量$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$が保存される。

・時間が一様であれば，ラグランジアンは時間をあらわには含まないので$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}=\dot{p}\dot{q}+p\ddot{q}=\frac{d}{dt}(p\dot{q})$より，$\frac{d}{dt}(p\dot{q}-L)=0$となり，$p\dot{q}-L$が保存する。この保存量はエネルギーである。

・角運動量は空間反転に対して不変であるが、ネジは不変でない。また，この宇宙は，空間反転に対して対称でない事例（π中間子の崩壊など）が存在する。

2. 三次元空間内で運動する二つの粒子の座標と質量を$\vec{x}_1, m_1$，$\vec{x}_2, m_2$とし，それぞれの粒子のポテンシャルエネルギーを$U_1(\vec{x})=\frac{m_1}{|\vec{x}|}, U_2(\vec{x})=\frac{m_2}{|\vec{x}|}$とするとき，デカルト座標を用いてラグランジアンと Euler-Lagrange 方程式を書け。

$$L=\frac{m_1}{2}\left|\dot{\vec{x}}_1\right|^2+\frac{m_2}{2}\left|\dot{\vec{x}}_2\right|^2-\frac{m_1}{|\vec{x}_1|}-\frac{m_2}{|\vec{x}_2|}\ ,\ \frac{m_1\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3}-m_1\ddot{\vec{x}}_1=0\quad ,\frac{m_2\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|^3}-m_2\ddot{\vec{x}}_2=0$$

3. 二次元平面内を運動する質量mの二つの粒子の座標を$\vec{x}_1=(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$，$\vec{x}_2=(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$とし，二つの粒子のポテンシャルエネルギーが$U=\frac{1}{2}k|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2$で与えられるとき，各座標に共役な運動量を求めた後，ハミルトニアンと正準方程式を，極座標を用いて書け。

まず，$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}_1^2+r_1^2\dot{\theta}_1^2+\dot{r}_2^2+r_2^2\dot{\theta}_2^2\right)-\frac{1}{2}k|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2$より、$p_{r1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1}=m\dot{r}_1$，$p_{\theta 1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}=mr_1^2\dot{\theta}_1$　などを用いて，

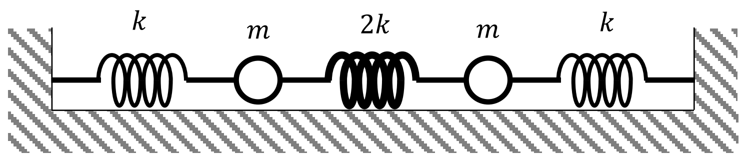
$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}\left(p_{r1}^2+p_{r2}^2+\frac{p_{\theta 1}^2}{r_1^2}+\frac{p_{\theta 2}^2}{r_2^2}\right)+\frac{1}{2}k(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2+\frac{1}{2}k(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_{r1}^2+p_{r2}^2+\frac{p_{\theta 1}^2}{r_1^2}+\frac{p_{\theta 2}^2}{r_2^2}\right)+\frac{k}{2}\left(r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)$$

正準方程式は，$\dot{p}_{r1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_1} = \frac{p_{\theta 1}^2}{m r_1^3} - k r_1 - 2k r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$，$\dot{r}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{r_1}} = \frac{p_{r1}}{m}$

及び，$\dot{p}_{\theta 1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_1} = +2k r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$，$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta 1}} = \frac{p_{\theta 1}}{m r_1^2}$　など。

4. 右図のようにバネでつながれた質量をmの二つの粒子の一次元運動を調べよ。



$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x_1^2 - \frac{2k}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{k}{2}x_2^2$より，運動方程式は,

$-kx_1 - 2k(x_1 - x_2) - m_1\ddot{x}_1 = 0$　及び $2k(x_1 - x_2) - kx_2 - m_2\ddot{x}_2 = 0$

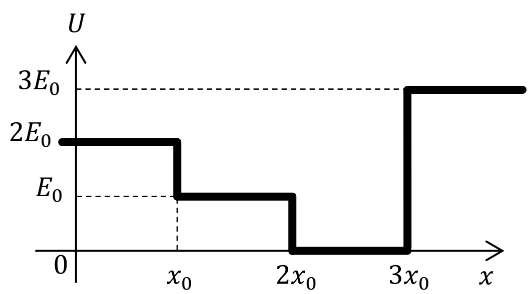
よって，$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$となり，行列の固有値は$(-3 - \lambda)^2 - 4 = 0$

よって，$\lambda_\pm = \pm 2 - 3 = -1, -5$ を得る（確かにどちらも負符号)。

固有ベクトルは$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$より，$-3a + 2b = \lambda_\pm a$となり,

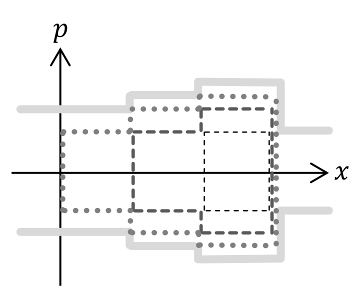
$b = \frac{(\lambda_\pm + 3)}{2}a = \frac{\pm 2}{2}a = \pm a$ であるので，規格化して$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$が基準座標。

以上より，基準振動数は$\omega_\pm = \sqrt{k/m}\,, \sqrt{5k/m}\,$,
基準座標は，$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$及び　$\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$。

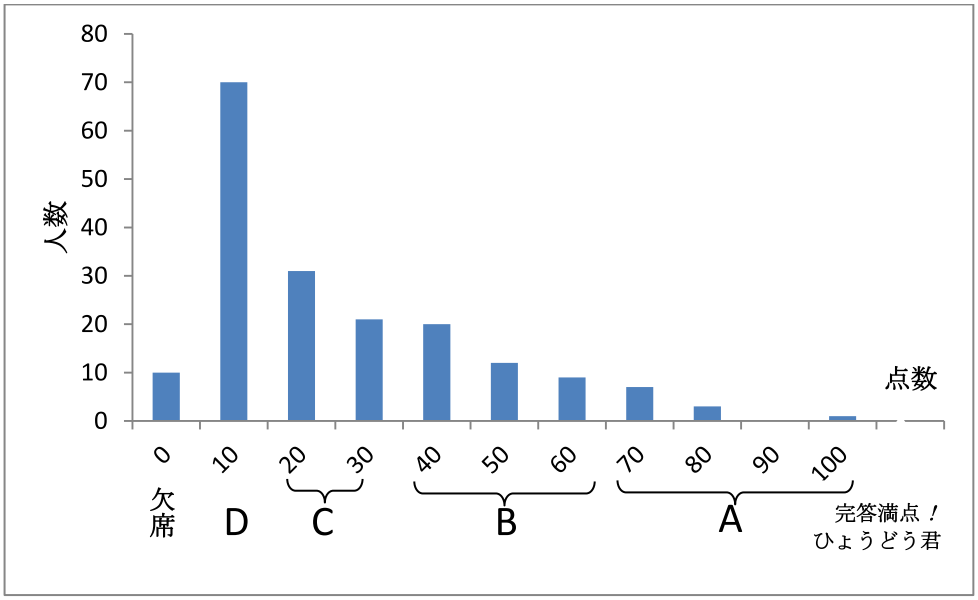


5. 右図のようなポテンシャル中を一次元運動する粒子について，全エネルギーが$E/E_0 = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5$　の場合について位相空間(x, p)でどのような軌跡を描くか示せ。

Eの値の順番に、------- ----- ······· ——— の線で示す。



2013年度春学期　解析力学試験結果及び略解



【講評】

問1.　空間と時間の対称性について何でも良いから熱く語れ！　と言う問題ではありません。

（まるで中学校の作文のように熱く語った回答が多かったです）

問2.　「ベクトル＝スカラー」という、とてつもなく恥ずかしい式を書いた人が大勢います。

念のため、 $\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1}\left(\frac{m}{|\vec{x}_1|}\right) = \nabla\left(\frac{m}{|\vec{x}_1|}\right) = \frac{-m\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3}$ 　はベクトルです。

問3.　三次元の位置を表す変数$\vec{x}_1$が、$\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$という単純なことに全く気づいていない人がとても多い。

問4.　二次元行列の対角化が出来ない人が大勢いました。

理工系で最も有用な数学は、フーリエ変換（級数）と、対角化です。

問5.　水平面を走る質点は、等速直線運動します。そして、ポテンシャルが全エネルギーよりも大きな領域には質点は行けません。どちらも中学校の理科のレベルの話です。

※諸般の事情（某卒研生に泣きつかれた）により、上の棒グラフのような評点になりました。おかげで、来年から心機一転、量子力学（特にスピン）と統計力学をもっと取り入れた講義にすることが出来そうです。

後藤　3-335B